Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-05-29

1. Kurvan kan skrivas som nivåkurvan $F(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2 = 0$. Normallinjen till kurvan i punkten $(1, 2)$ har riktningsvektor $\boldsymbol{v} \parallel \nabla F(1, 2) = (4, -4)$, så vi kan ta $\boldsymbol{v} = (1, -1)$. Normallinjen ges därför av

$$(x, y) = (1, 2) + t(1, -1) = (1 + t, 2 - t), \quad t \in \mathbf{R},$$

och den skär kurvan precis där $0 = F(1 + t, 2 - t) = t^2 + 8t \Leftrightarrow t = 0$ eller $t = -8$, som ger punkterna $(1, 2)$ – som ju är startpunkten – respektive $(-7, 10)$. <u>Svar</u>: $(-7, 10)$.

2. Linjärt byte $u = x + y$, $v = 2x - y$ ger $d(u, v)/d(x, y) = -3$, så $dxdy = dudv/3$, och det nya området ges av $1 \le u \le v \le 2$. Eftersom $x - y = (2v - u)/3$ får vi därför

$$\iint_D \frac{x - y}{x + y}\, dxdy = \frac{1}{9} \int_1^2 \left(\int_u^2 \frac{2v - u}{u}\, dv \right) du = \frac{1}{9} \int_1^2 \left(\frac{4}{u} - 2 \right) du = \frac{2}{9}(2 \ln 2 - 1).$$

3. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = 4x - 2xy = 0$, $f'_y = 2y - x^2 = 0$, $f'_z = 2z = 0$. Den tredje ekvationen ger genast $z = 0$, och insättning av $2y = x^2$ från den andra i den första ger $4x - x^3 = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = \pm 2$. Vi får således totalt tre stationära punkter: $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$ och $(-2, 2, 0)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4 - 2y$, $f''_{xy} = -2x$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = 2$.

   I punkten $(0, 0, 0)$ är $f''_{xx} = 4$ och $f''_{xy} = 0$, så vi får den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = 4h^2 + 2k^2 + 2l^2,$$

   som är positivt definit: $Q(h, k, l) \ge 0$ för alla (h, k, l), och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Alltså är punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ en lokal minimipunkt för f.

   I punkten $(2, 2, 0)$ blir i stället $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = -4$, och där blir $Q(h, k, l) = 2k^2 + 2l^2 - 8hk = 2\left((k - 2h)^2 - 4h^2 + l^2\right)$, som är indefinit: exempelvis är $Q(0, 1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(1, 2, 0) = -8 < 0$. Punkten $(x, y, z) = (2, 2, 0)$ är alltså ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(-2, 2, 0)$, slutligen, är $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = 4$, och där blir den kvadratiska formen $Q(h, k, l) = 2k^2 + 2l^2 + 8hk = 2\left((k + 2h)^2 - 4h^2 + l^2\right)$, som också är indefinit.

   <u>Svar</u>: $(0, 0, 0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u + z'_v$. Vidare, $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y z'_u)'_x = y (z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$ och $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y z'_u)'_y = z'_u + y (z'_u)'_y = z'_u + y(x z''_{uu} + z''_{uv})$. Insättning i differentialekvationen ger $-y^2 z''_{uv} = 2xy$, och eftersom $x > 0$ och $y > 0$ får vi $z''_{uv} = -2x/y = -2u/v^2$. Integration ger först $z'_u = 2u/v + g(u)$ och sedan $z = u^2/v + G(u) + H(v) = x^2 y + G(xy) + H(y)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. <u>Svar</u>: $z(x, y) = x^2 y + G(xy) + H(y)$.

5. Skivorna K_z på fixa z-nivåer är cirkelskivor med radie $\sqrt{1-z^2}$, så

$$\iiint_K dxdydz = \int_{1/3}^{1} \left(\iint_{K_z} dxdy \right) dz = \int_{1/3}^{1} \text{area}(K_z)\, dz = \int_{1/3}^{1} \pi(1-z^2)\, dz = \frac{28}{81}\pi,$$

och, analogt,

$$\iiint_K z\, dxdydz = \int_{1/3}^{1} \pi(z-z^3)\, dz = \frac{16}{81}\pi,$$

så $z_T = (16\pi/81)/(28\pi/81) = 4/7$. <u>Svar</u>: $z_T = 4/7$.

6. Sätt $F(x,y,z) = x + e^y + \ln z$ och $G(x,y,z) = e^x + \ln y + z$; då utgörs lösningarna till ekvationssystemet av skärningskurvan mellan nivåytorna $F = e$ och $G = 2$. Vi får

$$\nabla F \times \nabla G = \left(1, e^y, \frac{1}{z}\right) \times \left(e^x, \frac{1}{y}, 1\right) = \left(e^y - \frac{1}{yz}, \frac{e^x}{z} - 1, \frac{1}{y} - e^x e^y\right),$$

vars x-komponent i punkten $(0,1,1)$ är $e - 1 \neq 0$. Eftersom $F(0,1,1) = e$, $G(0,1,1) = 2$ och F och G är $\mathcal{C}^1$-funktioner, ger implicita funktionssatsen därför att ekvationssystemet $F = e$, $G = 2$ i någon omgivning till $(0,1,1)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $y(x)$ och $z(x)$. Implicit derivering med avseende på x nära $x = 0$ ger sedan, i matrisform,

$$\begin{pmatrix} e^y & 1/z \\ 1/y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{e^y - 1/yz} \begin{pmatrix} 1 & -1/z \\ -1/y & e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Eftersom $y(0) = 1$ och $z(0) = 1$ får vi speciellt att $y'(0) = 0$ och $z'(0) = -1$, så $z(x)$ har inte lokalt extremvärde i $x = 0$ medan $y(x)$ eventuellt har det. Från uttrycket ovan ser vi att funktionerna $y(x)$ och $z(x)$ till och med är $\mathcal{C}^2$ eftersom högerledet där är $\mathcal{C}^1$, och vi kan därför derivera en gång till:

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x/z - 1}{e^y - 1/yz}\right) = \frac{e^x/z - e^x z'/z^2}{e^y - 1/yz} - \frac{(e^x/z - 1)\cdot \text{något}}{(e^y - 1/yz)^2} = \frac{2}{e-1} > 0 \text{ då } x = 0,$$

så $y(x)$ har lokalt minimum i $x = 0$.