Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-08-16

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 4y - 4x^3 = 0$ och $f'_y = 4x - 4y = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $4x - 4x^3 = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = \pm 1$, och vi får därmed totalt tre stationära punkter: $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Andraderivatorna blir $f''_{xx} = -12x^2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 0$ och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 + 4h^2, \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,1) = 4 > 0$ medan $Q(0,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(1,1)$ och $(-1,-1)$ blir $f''_{xx} = -12$, och vi får i båda punkterna den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -12h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 - 8h^2,$$

   som är negativt definit eftersom $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$ lokala maximipunkter för f.

   Svar: $(1,1)$ och $(-1,-1)$ är lokala maximipunkter. Lokala minimipunkter saknas.

2. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 24$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med det givna planet, $x + 3y + z = 0$, precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,3,1)$ och $F(a,b,c) = 24$, d.v.s. precis då $(2a + 2b, 2a + 4b, 2c) \parallel (1,3,1)$ och $a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab = 24$. Det första villkoret ger $6a + 6b = 2a + 4b = 6c$, d.v.s. $b = -2a$ och $c = -a$, som insatt i det andra ger $6a^2 = 24$, d.v.s. $a = \pm 2$, och därmed tangeringspunkterna $(2,-4,-2)$ och $(-2,4,2)$, med tangentplanen $x + 3y + z = -12$ respektive $x + 3y + z = 12$.

   Svar: Planen är $x + 3y + z = 12$ och $x + 3y + z = -12$.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan $x^2 + 2y^2 = 2 - 2x$, $z = 2 - 2x$, vars projektion på xy-planet är ellipsen $(x+1)^2 + 2y^2 = 3$. Den givna kroppen D har projektionen $\tilde{D}$ i xy-planet som ges av $(x+1)^2 + 2y^2 \leq 3$, så med stavar i z-led får vi, med linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}\,y$ och ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 3$ och $dudv = \sqrt{2}\,dxdy$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\tilde{D}} \left((2-2x) - (x^2 + 2y^2)\right) dxdy = \iint_E (3 - u^2 - v^2)\,\frac{dudv}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} (3 - \rho^2)\rho\, d\varphi \right) d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(3-\rho^2)^2}{2 \cdot (-2)} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y^2 z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2xy z'_u - z'_v/y^2$, och insättning i differentialekvationen ger $z'_v/y^2 = 1$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $z'_v = y^2 = 1/v^2$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $z = -1/v + g(u) = -y + g(xy^2)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = z(x,x) = -x + g(x^3)$ då $x > 0$, så $g(t) = \sqrt[3]{t}$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x,y) = -y + \sqrt[3]{xy^2}$ då $x > 0$ och $y > 0$.

   Svar: $z(x,y) = \sqrt[3]{xy^2} - y$.

5. (a) Integration av ekvation 1 m.a.p. x ger $u = x + \sin xy + g(y,z)$, som deriverat m.a.p. y och insatt i ekvation 2 ger $g'_y(y,z) = ze^{yz}$, d.v.s. $g(y,z) = e^{yz} + h(z)$. Derivering av u m.a.p. z och insättning i ekvation 3 ger nu $h'(z) = 1$, d.v.s. $h(z) = z + C$. Villkoret $u(0,0,0) = 0$ ger slutligen $C = -1$. <u>Svar</u>: $u(x,y,z) = x + \sin xy + e^{yz} + z - 1$.

   (b) Integration av ekvation 2 m.a.p. y ger $u = y^2 e^{x^2}/2x + g(x)$, som deriverat m.a.p. x och insatt i ekvation 1 ger $g'(x) = e^{x^2}(1 + y^2/2x^2)$, vilket är en motsägelse eftersom högerledet i denna likhet även beror på y. <u>Svar</u>: Lösning saknas.

6. Integralen är generaliserad men integranden är positiv (eftersom $y \geq |x| \geq 0$ i D), så variabelbyte och upprepad integration får användas.

   Linjärt byte $u = x$, $v = \sqrt{3}\,y$, $w = 2z$ med $|d(u,v,w)/d(x,y,z)| = 2\sqrt{3}$ och nytt område $E: v \geq \sqrt{3}\,|u|$, $w \geq 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$, med gränser $F: 0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi/3$, ger

$$\iiint_D y\, e^{-(x^2+3y^2+4z^2)^2}\, dxdydz = \iiint_E \frac{v}{\sqrt{3}}\, e^{-(u^2+v^2+w^2)^2}\, \frac{dudvdw}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty r^3 e^{-r^4}\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{e^{-r^4}}{-4}\right]_0^\infty \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \left[-\cos\varphi\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 1 = \frac{\pi}{96}.$$