Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2012-10-22

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x + 4y = 0$ och $f'_y = 2y + 4x + 3y^2 = 0$. Den första ekvationen ger genast $x = -2y$, som insatt i den andra ger $3y^2 - 6y = 0$, d.v.s. $y = 0$ eller $y = 2$, och vi får därmed två stationära punkter: $(0, 0)$ och $(-4, 2)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2 + 6y$.

   I $(0, 0)$ blir $f''_{yy} = 2$, och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(h + 2k)^2 - 6k^2, \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(2, -1) = -6 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(-4, 2)$ blir $f''_{yy} = 14$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = 2h^2 + 8hk + 14k^2 = 2(h + 2k)^2 + 6k^2,$$

   som är positivt definit eftersom $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $h + 2k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(-4, 2)$ en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(-4, 2)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Integralen är generaliserad men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas. Vi får

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2)^2} = \int_0^\infty \left(\int_0^x dy \right) \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

3. Ytan kan skrivas som nivåytan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 4z = 36$. Normallinjen till ytan i en punkt (a, b, c) på ytan har riktningsvektor $\nabla F(a, b, c) = (2a+1, 2b-1, 2c+4)$, och normallinjen går genom origo precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (a-0, b-0, c-0)$ och $F(a, b, c) = 36$, d.v.s. precis då $\mathbf{0} = (2a + 1, 2b - 1, 2c + 4) \times (a, b, c) = (-4b - c, 4a - c, a + b)$ och $a^2 + b^2 + c^2 + a - b + 4c = 36$. Det första villkoret ger $b = -a$ och $c = 4a$, som insatt i det andra ger $18a^2 + 18a = 36$, d.v.s. $a = 1$ eller $a = -2$. Vi får således punkterna $(1, -1, 4)$ och $(-2, 2, -8)$.

   Svar: $(1, -1, 4)$ och $(-2, 2, -8)$.

4. Linjärt byte $u = 3x$, $v = 2y$, $w = z$ med funktionaldeterminant $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 6$ så att $dxdydz = dudvdw/6$ och nytt område $E : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $v \geq u \geq 0$, $w \leq 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r \sin\theta \cos\varphi$, $v = r \sin\theta \sin\varphi$, $w = r \cos\theta$, med $dudvdw = r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi$ och gränser $F : 0 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$, ger

$$\begin{aligned} \iiint_D yz\, dxdydz &= \iiint_E \frac{vw}{2} \frac{dudvdw}{6} = \frac{1}{12} \int_0^2 r^4\, dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} [-\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{45}. \end{aligned}$$

5. (a) f är partiellt deriverbar m.a.p. x i (a,b) om $f'_x(a,b) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ existerar.

(b) $g'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3/(h^2+0^2)-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$ Svar: 1.

(c) Eftersom $g(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$ ger derivering $g'_x(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$, och eftersom $g'_x(0,y) = 0 \to 0 \neq 1 = g'_x(0,0)$ då $y \to 0$ ser vi att g'_x inte är kontinuerlig i $(0,0)$. Svar: g'_x är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

6. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + y z'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_v$. Vidare, $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x z'_v)'_y = x(z'_v)'_y = x^2 z''_{vv}$ och $z''_{xy} = (z'_y)'_x = (x z'_v)'_x = z'_v + x(z'_v)'_x = z'_v + x(z''_{uv} + y z''_{vv})$. Insättning i differentialekvationen ger $-x^2 z''_{uv} = x$, och eftersom $x > 0$ får vi $z''_{uv} = -1/x = -1/u$. Integration ger först $z'_u = -v/u + g(u)$ och sedan $z = -v \ln u + G(u) + H(v) = -xy \ln x + G(x) + H(xy)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Bivillkoren ger nu $y^2+1 = z(1,y) = G(1)+H(y)$ för $y \in \mathbf{R}$ och $x = z(x,0) = G(x)+H(0)$ för $x > 0$, så $H(t) = t^2+1-G(1)$ för $t \in \mathbf{R}$ och $G(t) = t - H(0)$ för $t > 0$, så $z(x,y) = -xy\ln x + x - H(0) + (xy)^2 + 1 - G(1) = -xy \ln x + x + (xy)^2$, eftersom $G(1)+H(0) = 1$.

Svar: $z(x,y) = -xy\ln x + x + (xy)^2$.