Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-01-10

1. Enklast är antagligen att göra det linjära variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} v,$$

med funktionaldeterminanten $4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6$. Triangeln D motsvaras då i (u, v)-planet av triangeln E med hörn i $(u, v) = (0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x)\, dxdy &= \iint_E \big((u + 2v) - (4u + 2v)\big) \cdot 6\, dudv \\ &= 6 \iint_E (-3u)\, dudv = -18 \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=0}^{1-u} u\, dv \right) du \\ &= -18 \int_{u=0}^{1} (u - u^2)\, du = -18 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = -3. \end{aligned}$$

Svar: -3.

2. Låt $f(x, y) = x^3 + 3y^2$. Vi söker de punkter $P = (a, b)$ som ligger på nivåkurvan $f = 12$ och som är sådana att gradienten $\nabla f(a, b) = (3a^2, 6b)$ (som ju är riktningsvektor för normallinjen genom P) är parallell med vektorn från origo till P (alltså parallell med vektorn (a, b)). Dessa krav ger två villkor för våra två obekanta a och b:

$$a^3 + 3b^2 = 12 \qquad \text{och} \qquad 0 = \begin{vmatrix} 3a^2 & a \\ 6b & b \end{vmatrix} = 3ab(a - 2).$$

De fem lösningarna till detta ekvationssystem ger svaret.

Svar: $(\sqrt[3]{12}, 0)$, $(0, \pm 2)$, $(2, \pm 2/\sqrt{3})$.

3. Bytet $(u, v, w) = (2x, y, z)$ ger ett nytt område E som definieras av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, alltså ett åttondels klot. Efter byte till rymdpolära koordinater i (u, v, w)-rummet fås sedan området F som ges av $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Alltså:

$$\begin{aligned} \iiint_D x\, dxdydz &= \iiint_E \tfrac{1}{2}u \cdot \tfrac{1}{2}\, dudvdw = \frac{1}{4} \iiint_F (r \cos\phi \sin\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(Man kan även utnyttja att $\iiint_E u\, dudvdw = \iiint_E w\, dudvdw$ av symmetriskäl, så får man istället den aningen enklare integralen $\frac{1}{4} \iiint_F (r \cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi$ i sista steget.)

Svar: $\pi/4$.

4. Låt $f(x, y, z) = 3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3$. Eftersom $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, $f(1, 2, -1) = 19$ och $f'_z(1, 2, -1) = -3 \cdot 2 + 3(-1)^2 \neq 0$, så definierar ekvationen $f(x, y, z) = 19$ enligt implicita funktionssatsen en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$ i en omgivning av $(1, 2, -1)$. Per definition är $z(1, 2) = -1$, och eftersom $f(x, y, z(x, y)) = 19$ för alla (x, y) i en omgivning av $(1, 2)$ så är (i denna omgivning) $\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x, y, z(x, y)\Big) = 0$, dvs

$$f'_x(x, y, z(x, y)) + f'_z((x, y, z(x, y)))z'_x(x, y) = 0,$$

så att

$$z'_x(1,2) = -\frac{f'_x(1,2,-1)}{f'_z(1,2,-1)} = -\frac{6}{-3} = 2,$$

och på liknande sätt

$$z'_y(1,2) = -\frac{f'_y(1,2,-1)}{f'_z(1,2,-1)} = -\frac{15}{-3} = 5.$$

Tangentplanets ekvation är därmed $z = -1 + 2(x-1) + 5(y-2)$, dvs $2x + 5y - z = 13$. (Alternativt sätt att ta fram tangentplanets ekvation: använd direkt att normalvektorn $\nabla f(1,2,-1) = (6,15,-3) = 3(2,5,-1)$ ger koefficienterna för x, y och z.)

Svar: Se ovan.

5. Stationära punkter ges av $\nabla f(x,y,z) = (6x^2 - 2xy, 2y - x^2, 2z) = (0,0,0)$, dvs $(x,y,z) = (0,0,0)$ eller $(6,18,0)$. Den kvadratiska formen i origo är $Q(h,k,l) = 2(k^2 + l^2)$, vilket inte säger oss något (eftersom Q är positiv semidefinit); däremot antar ju $f(x,0,0) = 2x^3$ såväl positiva som negativa värden godtyckligt nära $x = 0$, vilket direkt visar att origo inte är någon lokal extrempunkt.

   Den kvadratiska formen i $(6,18,0)$ är $Q(h,k,l) = 36h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 24hk = 2l^2 + 2(k-6h)^2 - 36h^2$. Teckenväxlingen $++-$ visar att Q är indefinit, t.ex. är ju $Q(1,6,0) = 0 + 0 - 36 < 0$ och $Q(0,0,1) = 2 + 0 + 0 > 0$. Inte heller denna punkt är alltså någon lokal extrempunkt.

   Svar: Funktionen saknar lokala extrempunkter.

6. I cylinderkoordinater (ρ, ϕ, z) beskrivs kroppen K av $\rho^2 + z^2 \leq 8$ och $z \geq \frac{1}{2}\rho^2$. Eftersom ϕ inte förekommer här så är kroppen rotationssymmetrisk kring z-axeln, och man kan lätt göra sig en bild av K genom att tänka sig den mängd i (ρ, z)-planet som avgränsas av cirkeln $\rho^2 + z^2 = 8$ och parabeln $z = \frac{1}{2}\rho^2$, och rotera denna mängd kring z-axeln. Notera att cirkeln och parabeln skär varandra i punkten $\rho = z = 2$, vilket man behöver veta när man ska ställa upp gränserna för integralerna.

   Om vi delar upp kroppen i cirkulära skivor D_z parallella med (x,y)-planet så får vi

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_{z=0}^{\sqrt{8}} z\,\mathrm{area}(D_z)\,dz = \int_0^2 z \cdot 2z\pi\,dz + \int_2^{\sqrt{8}} z \cdot (8 - z^2)\pi\,dz,$$

   och motsvarande för $\iiint_K dxdydz$.

   Om vi istället räknar med stavar parallella med z-axeln så får vi

$$\iiint_K z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2^2} \left(\int_{z=(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z\,dz \right) dxdy,$$

   och motsvarande för $\iiint_K dxdydz$.

   I båda fallen erhålls

$$z_T = \frac{28\pi/3}{(32\sqrt{2} - 28)\pi/3} = \frac{7}{8\sqrt{2} - 7} \quad (\approx 1{,}62).$$

   Svar: $\dfrac{7}{8\sqrt{2} - 7}$.