Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-05-31

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 3x^2 + 6x + 4y = 0$ och $f'_y = 4x + 2y = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = -2x$, som insatt i den första ger $3x^2 - 2x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 2/3$, och vi får därmed två stationära punkter: $(0,0)$ och $(2/3, -4/3)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x + 6$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 6$, och den kvadratiska formen
$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 6h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k+2h)^2 - 2h^2,$$
   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,1) = 2 > 0$ medan $Q(-1,2) = -2 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(2/3, -4/3)$ blir $f''_{xx} = 10$, och vi får den kvadratiska formen
$$Q(h,k) = 10h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k+2h)^2 + 2h^2,$$
   som är positivt definit eftersom $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $k + 2h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(2/3, -4/3)$ en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(2/3, -4/3)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-y z'_v = xy$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $z'_v = -u/v$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $z = -u \ln v + g(u) = -xy \ln y + g(xy)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = z(x,x) = -x^2 \ln x + g(x^2)$ då $x > 0$, så $g(t) = t \ln \sqrt{t} = t(\ln t)/2$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x,y) = -xy \ln y + xy(\ln xy)/2 = xy(\ln(x/y))/2$ då $x > 0$ och $y > 0$. Svar: $z(x,y) = (xy/2) \cdot \ln(x/y)$.

3. Linjärt variabelbyte:
$$\begin{cases} u = x + 2y, \\ v = y + z, \\ w = y - 2z, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad dudvdw = |-3|\, dxdydz = 3\, dxdydz,$$
   ger nytt område $E:\ 0 \leq u \leq v \leq w \leq 2$, och, med upprepad integration,
$$\iiint_D z\, dxdydz = \iiint_E \frac{v-w}{3} \frac{dudvdw}{3} = \frac{1}{9} \int_0^2 \left(\int_0^w \left(\int_0^v (v-w)\, du \right) dv \right) dw$$
$$= \frac{1}{9} \int_0^2 \left(\int_0^w (v^2 - vw)\, dv \right) dw = \frac{1}{9} \int_0^2 \left(-\frac{w^3}{6} \right) dw = -\frac{2}{27}.$$

4. Integralen är generaliserad men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas. Vi får, först med planpolärt byte och sedan med bytet $t = \rho^2$ i ρ-integralen följt av partiell integration i t-integralen,
$$\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^\infty \rho^3 e^{-\rho^2}\, d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$$
$$= \left[-\frac{(t+1)e^{-t}}{2} \right]_0^\infty \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

5. Sätt $F(x,y) = y^3 + \cos xy$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(0,1) = 2$ och $\nabla F(0,1) = (0,3)$, som har y-komponent $\neq 0$, ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y) = 2$ i en omgivning till punkten $(x,y) = (0,1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ med $y(0) = 1$. Vidare, för små $x \neq 0$ gäller det att $xy(x)$ är litet och $\neq 0$ varför $\cos(xy(x)) < 1$ där, och därför får vi att $y(x)^3 = 2 - \cos(xy(x)) > 1$ och därmed att $y(x) > 1 = y(0)$ för små $x \neq 0$; således har $y(x)$ (strängt) lokalt minimum i $x = 0$. <u>Svar</u>: Ja, lokalt minimum.

   (Alternativt kan man – när existensen av $\mathcal{C}^1$-funktionen $y(x)$ är bevisad – derivera implicit och studera teckenväxlingen för derivatan $y'(x) = (y(x)\sin xy(x))/(3y(x)^2 - x\sin xy(x))$ i en omgivning till $x = 0$, eller motivera att $y(x)$ är en $\mathcal{C}^2$-funktion och visa att $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 1/3 > 0$.)

6. Eftersom $f(x,0) = 0$ för alla x och $f(0,y) = 0$ för alla y ser vi till att börja med att $f'_x(0,0) = 0$ och $f'_y(0,0) = 0$.

   När $y \neq 0$ ger vanliga deriveringsregler att $f'_x(x,y) = y^4/(x^2 + y^4)$, och eftersom t.ex. $f'_x(0,t) = 1 \to 1 \neq 0 = f'_x(0,0)$ då $t \to 0$ ser vi att f'_x inte är kontinuerlig i $(0,0)$, och därmed är f inte av klass $\mathcal{C}^1$.

   Vidare, eftersom $|\arctan t| < \pi/2$ för alla t får vi $|f(x,y)| \leq y^2 \cdot \pi/2$ (även när $y = 0$), och därmed också $|f(x,y)| \leq (x^2 + y^2) \cdot \pi/2 = \rho^2 \cdot \pi/2$, så

$$\left| \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0) \cdot h - f'_y(0,0) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{\rho^2 \cdot \pi/2}{\rho} = \rho \cdot \pi/2 \to 0$$

   då $\rho \to 0$ (och φ varierar fritt), så f är differentierbar i origo.