

## Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2013-08-22

1. Sätt  $F(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ ; då är den givna ytan nivåytan  $F(x, y, z) = 12$ . Tangentplanet till denna yta i en punkt  $(a, b, c)$  på ytan är parallellt med planet  $6x - y - 3z = 0$  precis då  $\nabla F(a, b, c) \parallel (6, -1, -3)$  och  $F(a, b, c) = 12$ , d.v.s. precis då

$$(2a, 1, 3c^2) \parallel (6, -1, -3) \quad \text{och} \quad a^2 + b + c^3 = 12.$$

Det första villkoret ger  $2a = -6$  och  $3c^2 = 3$ , d.v.s.  $a = -3$  och  $c = \pm 1$ , som insatt i det andra ger  $b = 3 \mp 1$ , och därmed tangeringspunkterna  $(-3, 2, 1)$  och  $(-3, 4, -1)$ , med tangentplanen  $6x - y - 3z = -23$  respektive  $6x - y - 3z = -19$ .

Svar: Planen är  $6x - y - 3z = -23$  och  $6x - y - 3z = -19$ .

2. (a) Kedjeregeln ger först  $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^2 f'_u$  och sedan

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= (f'_x)'_y = (y^2 f'_u)'_y = 2y f'_u + y^2 (f'_u)'_y = 2y f'_u + y^2 (f''_{uu} u'_y + f''_{uv} v'_y) \\ &= 2y f'_u + y^2 (2xy f''_{uu} + f''_{uv}) = 2y f'_u + 2xy^3 f''_{uu} + y^2 f''_{uv} \\ &= 2v f'_u + 2uv f''_{uu} + v^2 f''_{uv}. \end{aligned}$$

(b) De partiella andraderivatorna skall existera och vara kontinuerliga.

3. Integrationsområdet  $0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2$  kan skrivas  $0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y/2$ , så

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_{2x}^2 \frac{dy}{1+y^4} \right) x^2 dx &= \int_0^2 \left( \int_0^{y/2} x^2 dx \right) \frac{dy}{1+y^4} \\ &= \frac{1}{24} \int_0^2 \frac{y^3 dy}{1+y^4} = \frac{1}{24} \left[ \frac{\ln(1+y^4)}{4} \right]_0^2 = \frac{\ln 17}{96}. \end{aligned}$$

4. Stationära punkter för  $f$  fås ur ekvationssystemet  $f'_x = x + y - z = 0$ ,  $f'_y = x + 2y^2 = 0$ ,  $f'_z = 2z - x = 0$ . Den tredje ekvationen ger genast  $x = 2z$ , och den första ger sedan  $y = -z$  varpå den andra ger  $2z + 2z^2 = 0$ , alltså  $z = 0$  eller  $z = -1$ . Vi får således två stationära punkter:  $(0, 0, 0)$  och  $(-2, 1, -1)$ .

Andraderivatorna blir  $f''_{xx} = 1$ ,  $f''_{xy} = 1$ ,  $f''_{xz} = -1$ ,  $f''_{yy} = 4y$ ,  $f''_{yz} = 0$ ,  $f''_{zz} = 2$ .

I punkten  $(0, 0, 0)$  är  $f''_{yy} = 0$ , så vi får den kvadratiske formen

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = (h \quad k \quad l) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= h^2 + 2hk - 2hl + 2l^2 = (h + k - l)^2 + (l + k)^2 - 2k^2, \end{aligned}$$

som är indefinit: exempelvis är  $Q(1, 0, 0) = 1 > 0$  medan  $Q(2, -1, 1) = -2 < 0$ .

I punkten  $(-2, 1, -1)$  blir i stället  $f''_{yy} = 4$  och  $Q(h, k, l) = h^2 + 2hk - 2hl + 4k^2 + 2l^2 = (h + k - l)^2 + (l + k)^2 + 2k^2$ , som är positivt definit:  $Q(h, k, l) \geq 0$  för alla  $(h, k, l)$ , och  $Q(h, k, l) = 0$  endast om  $h + k - l = 0$ ,  $l + k = 0$  och  $k = 0$ , d.v.s. endast om  $(h, k, l) = (0, 0, 0)$ . Alltså är punkten  $(x, y, z) = (-2, 1, -1)$  en lokal minimipunkt för  $f$ .

Svar:  $(-2, 1, -1)$  är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. För fixt  $y \geq 0$  får vi tvärsnittet  $D_y$ , som kan skrivas  $y^2 \leq x + z \leq 2 - y$ ,  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , och som är icke-tomt precis då  $0 \leq y \leq 1$ . För dessa  $y$  är  $D_y$  en halv kvadrat med sidlängd  $2 - y$  men med en halv kvadrat med sidlängd  $y^2$  borttagen, så kroppens volym  $V$  blir

$$V = \int_0^1 \text{area}(D_y) dy = \int_0^1 \frac{(2-y)^2 - (y^2)^2}{2} dy = \left[ -\frac{(2-y)^3}{6} - \frac{y^5}{10} \right]_0^1 = \frac{16}{15}.$$

6. Integralen är generaliserad och integranden  $f(x, y) = (x - y)/(x + y)^3$  växlar tecken på  $D$ . Enligt definitionen på generaliserad dubbelintegral är därför  $\iint_D f(x, y) dx dy$  konvergent om och endast om  $\iint_D |f(x, y)| dx dy$  är konvergent. Eftersom  $|f(x, y)| \geq 0$  får vi använda upprepad integration på  $\iint_D |f(x, y)| dx dy$ , och vi får, tack vare symmetri i integrand och område,

$$\begin{aligned} \iint_D |f(x, y)| dx dy &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{|x - y| dy}{(x + y)^3} \right) dx = 2 \int_0^\infty \left( \int_0^x \frac{(x - y) dy}{(x + y)^3} \right) dx \\ &= 2 \int_0^\infty \left[ \frac{y}{(x + y)^2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2x}, \end{aligned}$$

som är divergent ( $= +\infty$ ); alltså är  $\iint_D f(x, y) dx dy$  divergent.

Svar: Integralen är divergent.