Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-01-07

1. (a) Med $u = x$ och $v = x^2 - y$ fås enligt kedjeregeln $f'_x = f'_u + 2xf'_v$ och $f'_y = -f'_v$. Insättning av detta i PDE:n ger $(f'_u + 2xf'_v) + 2x(-f'_v) = xy + x^3$, alltså $f'_u = u(u^2 - v) + u^3 = 2u^3 - uv$. Integration med avseende på u ger $f(u, v) = u^4/2 - u^2v/2 + g(v)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Uttryckt i de ursprungliga koordinaterna har vi därmed svaret $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$.

   (b) Bivillkoret $f(0, y) = y/2$ är uppfyllt om och endast om $0 + g(-y) = y/2$, dvs om $g(v) = -v/2$, dvs om $f(x, y) = x^2y/2 - (x^2 - y)/2$.

   Svar: (a) $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$ (b) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y - x^2 + y)$.

2. För att hitta stationära punkter sätter vi gradienten av $f(x, y, z) = 2xy + 2xz - y^2 - z^2 - x^3$ till noll:

$$(2y + 2z - 3x^2, 2x - 2y, 2x - 2z) = (0, 0, 0).$$

   Detta ger att $x = y = z$ och $2x + 2x - 3x^2 = 0$, alltså $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eller $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = -6x$, $f''_{yy} = f''_{zz} = -2$, $f''_{yz} = 0$ och $f''_{xy} = f''_{xz} = 2$, vilket på vanligt sätt ger de kvadratiska formerna $Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2k^2 - 2l^2 + 4hk + 4hl = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 + 4h^2$ (indefinit ty positiv för $(h, k, l) = (1, 1, 1)$ och negativ för $(h, k, l) = (0, 1, 0)$, så origo är en sadelpunkt) respektive $Q_{(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})}(h, k, l) = -8h^2 + Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 - 4h^2$ (negativt definit, så $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$ är ett lokalt maximum).

   Svar: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ är en lokal maximipunkt för f. Lokala minimipunkter saknas.

3. Det linjära variabelbytet $u = x + 4y - z$, $v = x + y$, $w = y + z$ avbildar D på ett nytt område E som ges av $0 \le u \le v \le w \le 1$, och eftersom $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = -4$ så blir $du\,dv\,dw = 4\,dx\,dy\,dz$. Integranden $x - z$ ges i nya variabler av $v - w$ (som förresten är uppenbart negativt inuti E), så vi får $\iiint_D (x - z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4}\iiint_E (v - w)\,du\,dv\,dw$, vilket går att räkna ut med upprepad integration på flera sätt, t.ex.

$$\frac{1}{4}\int_{w=0}^{1}\left(\int_{v=0}^{w}\left(\int_{u=0}^{v}(v - w)\,du\right)dv\right)dw.$$

   Svar: $-1/96$.

4. Linjärt byte $x = u$, $y = v/\sqrt{3}$, följt av övergång till polära koordinater i (u, v)-planet, ger

$$\iint\limits_{\substack{1 \le x^2 + 3y^2 \le 3 \\ 0 \le y \le x}} xy\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{1 \le u^2 + v^2 \le 3 \\ 0 \le v/\sqrt{3} \le u}} u\,\frac{v}{\sqrt{3}}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{3}} = \iint\limits_{\substack{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le \rho \le \sqrt{3}}} \frac{\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi}{3}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/3}.$$

   Svar: $1/4$.

5. Sätt $f(x,y,z) = xyz + e^{2x} - y$ och $g(x,y,z) = x + 3y - z$. Då är f och g av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(0,1,2)$ uppfyller villkoren $f = 0$ och $g = 1$, och i den punkten är

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} yz + 2e^{2x} & xz - 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

så enligt implicita funktionssatsen definierar villkoren $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$ i en omgivning av $(0,1,2)$, vilket skulle visas. Per definition gäller $x(2) = 0$ och $y(2) = 1$, och derivatorna kan beräknas med implicit derivering: derivera identiteterna $f(x(z), y(z), z) = 0$ och $g(x(z), y(z), z) = 1$ med avseende på z och sätt $z = 2$, så erhålls ekvationssystemet $4x'(2) - y'(2) = 0$, $x'(2) + 3y'(2) - 1 = 0$, med lösningen $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Skärningskurvan mellan ytorna har parametriseringen $(x,y,z) = (x(s), y(s), s)$, så tangentvektorn $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ i punkten $(0,1,2)$ (då $s = 2$) är $(x'(2), y'(2), 1) = (\frac{1}{13}, \frac{4}{13}, 1)$. Tangentlinjens ekvation på parameterform blir alltså $(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,4,13)$. (Man kan även ta fram tangentlinjens riktningsvektor geometriskt, genom att kryssa ytornas normalvektorer: $\nabla f(0,1,2) \times \nabla g(0,1,2)$.)

Svar: Värdena är $x(2) = 0$, $y(2) = 1$, $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Tangentlinjen är $(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,4,13)$.

6. Det finns många framkomliga sätt att beräkna denna integral. T.ex. kan man titta på den åttondel E av kroppen D som ligger i positiva oktanten och ta stavar i y-led. Projektionen av E på (x,z)-planet är en fjärdedel av enhetscirkelskivan, och staven vid en given punkt (x,z) är $0 \leq y \leq 1 - x$. Volymen av D är alltså

$$8 \iiint_E dx\,dy\,dz = 8 \iint_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ x,z \geq 0}} (1 - x)\,dx\,dz = 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{1} (1 - \rho\cos\varphi)\,\rho\,d\rho \right) d\varphi = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Eller så kan man göra skivor; t.ex. är tvärsnittet genom D för fixt x en rektangel med sidorna $2\sqrt{1 - x^2}$ i z-led och $2(1 - |x|)$ i y-led, så volymen blir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1 - x^2}\,(1 - |x|)\,dx &= 8 \int_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} \right) dx \\ &= 8 \left(\tfrac{1}{4}(\text{Arean av enhetscirkeln}) + \left[\tfrac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} \right]_0^1 \right) = 2\pi - \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $2\pi - \frac{8}{3}$.