Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-06-04

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x - 4y - 3x^2 = 0$ och $f'_y = 2y - 4x = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = 2x$, som insatt i den första ger $3x^2 + 6x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = -2$, och vi får därmed två stationära punkter: $(0,0)$ och $(-2,-4)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2 - 6x$, $f''_{xy} = -4$ och $f''_{yy} = 2$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 2$, och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 - 8hk + 2k^2 = 2(k-2h)^2 - 6h^2, \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,1) = 2 > 0$ medan $Q(1,2) = -6 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(-2-4)$ blir $f''_{xx} = 14$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 14h^2 - 8hk + 2k^2 = 2(k-2h)^2 + 6h^2,$$

   som är positivt definit eftersom $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $k - 2h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(-2,-4)$ en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(-2,-4)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + 4z^2$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 23$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $3x - 2y + 9z = 1$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (3,-2,9)$ och $F(a,b,c) = 23$, d.v.s. precis då

$$(2a + 2c, 4b, 2a + 8c) \parallel (3,-2,9) \quad \text{och} \quad a^2 + 2b^2 + 2ac + 4c^2 = 23.$$

   Det första villkoret ger $b = -a$ och $c = 2a$, som insatt i det andra ger $a^2 = 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1,-1,2)$ och $(-1,1,-2)$, med tangentplanen $3x - 2y + 9z = 23$ respektive $3x - 2y + 9z = -23$.

   Svar: Planen är $3x - 2y + 9z = \pm 23$.

3. Linjärt byte $u = x + y$, $v = x - 2y$ ger ny, enklare, triangel E med hörn $(0,0)$, $(0,-3)$ och $(6,0)$, så E ges av olikheterna $-3 \leq v \leq 0$ och $0 \leq u \leq 6 + 2v$. Vidare, $d(u,v)/d(x,y) = -3$, så $dxdy = dudv/3$. Eftersom $x - y = (u + 2v)/3$ får vi därför

$$\iint_D (x-y)\,dxdy = \frac{1}{9}\int_{-3}^{0} \left(\int_0^{6+2v} (u+2v)\,du \right) dv = \frac{2}{3}\int_{-3}^{0} (3 + 4v + v^2)\,dv = 0.$$

4. Mängden D är en åttondels "glass-strut"; olikheterna kan i tur och ordning översättas till $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$ respektive $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$, rita figur! Rymdpolärt byte $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ger $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och ny mängd E med gränser enligt ovan. Vi får

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2 z\, dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi)^2\, r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} r^5\, dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi \\ &= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/6} \cdot \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8}{6} \cdot \frac{(1/2)^4}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{384}.\end{aligned}$$

5. (a) För varje $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att $|f(x,y) - L| < \epsilon$ för alla punkter (x,y) i definitionsmängden för f sådana att $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$.

   (b) Sätt $f(x,y) = \big(\ln(1+xy)\big)/(x^2+y^2)$. Eftersom $f(t,0) = 0 \to 0$ då $t \to 0$ medan $f(t,t) = \big(\ln(1+t^2)\big)/(2t^2) \to 1/2$ då $t \to 0$ saknar f gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.

   (c) Eftersom $\ln(1+t) = \mathcal{O}(t)$ och $xyz = \mathcal{O}(r^3)$ i rymdpolära koordinater får vi genast att $\big(\ln(1+xyz)\big)/(x^2+y^2+z^2) = \mathcal{O}(r^3)/r^2 = \mathcal{O}(r) \to 0$ då $r \to 0$ (och θ och φ varierar fritt), d.v.s. då $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

6. Vi noterar att avbildningen $(x,y,z) \mapsto (u,v,w)$ är $\mathcal{C}^1$, och att den har funktionaldeterminant

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = 1 + \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+z^2} \geq 1$$

för alla $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$; speciellt är determinanten $\neq 0$, så inversa funktionssatsen medför att avbildningen kring varje punkt (x,y,z) har en *lokal* $\mathcal{C}^1$-invers $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$.

För att undersöka om avbildningen har en *global* invers fixerar vi $(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$; vi vill visa att ekvationssystemet $u = x + \arctan y$, $v = y + \arctan z$, $w = z + \arctan x$, har högst en lösning (x,y,z) för detta (u,v,w). Antag tvärtom att *två* punkter, (x_1,y_1,z_1) och (x_2,y_2,z_2), avbildas på (u,v,w). Om $x_1 > x_2$ får vi i så fall från den första ekvationen att $\arctan y_1 - \arctan y_2 = x_2 - x_1 < 0$, och eftersom arctan är strängt växande är därför $y_1 < y_2$. Men detta medför att $\arctan z_1 - \arctan z_2 = y_2 - y_1 > 0$, så $z_1 > z_2$, vilket i sin tur medför att $\arctan x_1 - \arctan x_2 = z_2 - z_1 < 0$, så $x_1 < x_2$, en motsägelse. Inte heller $x_1 < x_2$ är möjligt (numrera om, om nödvändigt). Således är $x_1 = x_2$, och därmed följer det från ekvationssystemet att $z_1 = z_2$ och $y_1 = y_2$.

<u>Svar</u>: Global invers finns.