Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2014-08-21

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^2 f'_u$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2xy f'_u + f'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-y f'_v = xy$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $f'_v = -u/v^2$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $f = u/v + g(u) = xy + g(xy^2)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = f(1, y) = y + g(y^2)$ då $y > 0$, så $g(t) = -\sqrt{t}$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $f(x, y) = xy - \sqrt{xy^2} = (x - \sqrt{x})y$ då $x > 0$ och $y > 0$.

   Svar: $f(x, y) = (x - \sqrt{x})y$.

2. Eftersom $x^2 + xy + y^2 = (y + x/2)^2 + (x\sqrt{3}/2)^2$ gör vi först det linjära bytet $u = x/2 + y$, $v = x\sqrt{3}/2$, som ger $dudv = |d(u, v)/d(x, y)|dxdy = (\sqrt{3}/2)\,dxdy$ och nytt område E, där $u^2 + v^2 \leq 1$ och $v \geq 0$, och därefter det planpolära bytet $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, varför

$$\iint_D x\, dxdy = \iint_E \frac{2v}{\sqrt{3}} \frac{2\, dudv}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2\, d\rho = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

3. Låt $F(x, y, z) = 3y^2 - 2x^3 - 6xyz + z^3$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(1, 1, 1) = -4$ och $F'_z = 3z^2 - 6xy = -3 \neq 0$ i punkten $(1, 1, 1)$, så definierar ekvationen $F(x, y, z) = -4$ enligt implicita funktionssatsen en $\mathcal{C}^1$-funktion $z(x, y)$ i en omgivning till $(1, 1, 1)$. Per definition är $z(1, 1) = 1$, och eftersom $3y^2 - 2x^3 - 6xy\, z(x, y) + z(x, y)^3 = -4$ för alla (x, y) i en omgivning till $(1, 1)$, så ger derivering m.a.p. x att $-6x^2 - 6yz - 6xyz'_x + 3z^2 z'_x = 0$, så $z'_x = (6yz + 6x^2)/(3z^2 - 6xy)$; analogt får vi att $z'_y = (6xz - 6y)/(3z^2 - 6xy)$. Insättning ger $z'_x(1, 1) = -4$ och $z'_y(1, 1) = 0$, och tangentplanets ekvation är därmed $z = 1 - 4(x - 1) + 0(y - 1)$, d.v.s. $4x + z = 5$.

   Svar: $z(1, 1) = 1$, $z'_x(1, 1) = -4$, $z'_y(1, 1) = 0$; tangentplanets ekvation är $4x + z = 5$.

4. Sätt $F(x, y) = x^2 + y^3$; då är den givna kurvan nivåkurvan $F(x, y) = 1$. Normalen till kurvan i punkten (a, b) på kurvan går genom origo precis då $\nabla F(a, b) \parallel (a - 0, b - 0)$, d.v.s. precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 2a & 3b^2 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(2 - 3b).$$

   Fallet $a = 0$ ger i $F(a, b) = 1$ att $(a, b) = (0, 1)$, fallet $b = 0$ ger på samma sätt $(a, b) = (\pm 1, 0)$, medan fallet $b = 2/3$ ger $(a, b) = (\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$.

   Svar: $(0, 1)$, $(\pm 1, 0)$ och $(\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$, totalt fem punkter.

5. Integralen är generaliserad i origo, men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas.

   Klotet D ges av olikheten $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, som i rymdpolära koordinater blir $r^2 \leq 2r\cos\theta$. Rymdpolärt byte ger därför ny mängd E som bestäms av olikheterna $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq 2\cos\theta$, och som vanligt är $dxdydz = r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$. Vi får

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_E \frac{r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r\, dr \right) \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = 4\pi \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}.$$

6. $\nabla f = (ae^{ax} - 1 + by, bx + 4y) = (a-1, 0)$ i origo, och ett *nödvändigt* villkor för att f skall ha lokalt minimum i origo är att $\nabla f(0,0) = (0,0)$, d.v.s. att $a = 1$.

   Om nu $a = 1$, så ger Maclaurinutvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \mathcal{O}(t^4)$ och kvadratkomplettering att

$$f(x,y) = e^x - x + bxy + 2y^2 = 1 + \frac{1}{2}\big((x+by)^2 + (4-b^2)y^2\big) + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

   Den kvadratiska formen $Q(x,y) = (x+by)^2 + (4-b^2)y^2$ är positivt definit om $b^2 < 4$ och indefinit om $b^2 > 4$, så f har lokalt minimum i origo om $b^2 < 4$ men saknar lokalt extremvärde där om $b^2 > 4$. I de återstående fallen, $b = \pm 2$, är Q positivt semidefinit, och därför krävs vidare undersökning: Eftersom $f(bt, -t) = 1 + t^3\big(b^3/6 + \mathcal{O}(t)\big)$ då, och $b^3/6 \neq 0$, så antar $f(x,y)$ både större och mindre värden än $f(0,0) = 1$ i varje omgivning till $(0,0)$, så f saknar lokalt extremvärde i origo. Svar: $a = 1$, $-2 < b < 2$.