Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2014-10-27

1. (a) Enklast är ett direkt resonemang: i varje omgivning av $(0,0)$ finns punkter där f har positivt värde (t.ex. är $f(t,t) = t^2 > 0$ för alla $t \neq 0$), men även punkter där f har negativt värde (t.ex. $f(t,-t) = -t^2 < 0$). Alltså är $f(0,0) = 0$ inget lokalt extremvärde.

   (b) Maclaurinutveckla: $f(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + \ln(1+xy) = 2\Big(1+(x^2+y^2)+O(\rho^4)\Big) + \Big(xy + O(\rho^4)\Big) = 2 + Q(x,y) + O(\rho^4)$, där $Q(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + xy$ och $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Utvecklingen saknar förstagradstermer och den kvadratiska formen $Q(x,y) = 2(x+y/4)^2 + \frac{15}{8}y^2$ är positivt definit, så $f(0,0) = 2$ är ett lokalt minimum.

   (c) Om $f(x,y) = \sin(x^2+y) + \cos(x^2-y)$ så är $f'_y(x,y) = \cos(x^2+y) + \sin(x^2-y)$, och därmed $f'_y(0,0) = 1+0 \neq 0$. Origo är alltså inte en stationär punkt för f, och därmed inte någon lokal extrempunkt heller.

2. Vi byter till de nya variablerna $u = x$, $v = ye^{x^2}$. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 2xye^{x^2}$ och $f'_y = f'_u \cdot 0 + f'_v \cdot e^{x^2}$. Insättning i PDE:n ger $0 = f'_x - 2xyf'_y = (f'_u + 2xye^{x^2} f'_v) - 2xy(e^{x^2} f'_v) = f'_u$, så i nya variabler får vi helt enkelt $f'_u = 0$, och därmed alltså $f(u,v) = g(v)$, där g är en godtycklig C^1-funktion av en variabel. Återgång till ursprungliga variabler ger $f(x,y) = g(ye^{x^2})$. Bivillkoret $f(0,y) = g(y) = \sin y$ säger direkt vad g är!

   Svar: $f(x,y) = \sin(ye^{x^2})$.

3. Det linjära bytet $u = x$ och $v = \sqrt{3}\,y$ ger ett nytt område E som beskrivs av $u^2 + v^2 \leq 2$ och $0 < v/\sqrt{3} < -u$, vilket i polära koordinater motsvarar $\rho \leq \sqrt{2}$ och $2\pi/3 < \varphi < \pi$ (ovanför linjen $v = 0$ och under linjen $v = -\sqrt{3}\,u$). Integralen blir $\iint_D x\,dxdy = \iint_E u\,\frac{1}{\sqrt{3}} du dv = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \left(\int_{\varphi=2\pi/3}^{\pi} \rho\cos\varphi \cdot \rho\,d\varphi \right) d\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{\sqrt{2}} [\sin\varphi]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$.

   Annat sätt: Linjen $y = -x$ skär vänstra halvan av ellipsen i punkten $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, vilket ger $\iint_D x\,dxdy = \int_{y=0}^{1/\sqrt{2}} \left(\int_{x=-\sqrt{2-3y^2}}^{-y} x\,dx \right) dy = \ldots$

   Svar: $-\sqrt{2}/3$.

   (Redan innan man börjar räkna kan man notera att x måste vara negativt för att $0 < y < -x$ ska kunna gälla, så området D måste ligga i vänstra halvplanet, och eftersom det är just funktionen $f(x,y) = x$ som vi integrerar måste svaret bli negativt.)

4. (a) Låt $F(x,y,z) = x^3 - 3yz + e^{xz^2}$. Då är F av klass C^1 (eftersom det är ett polynom), $F(0,1,2) = 0 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + e^0 = -5$, och $F'_z(x,y,z) = -3y + 2xze^{xz^2}$ så att $F'_z(0,1,2) = -3 + 0 \neq 0$. Förutsättningarna i implicita funktionssatsen är alltså uppfyllda, och den visar att ekvationen $F(x,y,z) = -5$ definierar en C^1-funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning av $(0,1,2)$.

(b) Vi har $f(0,1) = 2$ per definition. Från $\nabla F(x,y,z) = (3x^2 + z^2 e^{xz^2}, -3z, -3y + 2xze^{xz^2})$ får vi $\nabla F(0,1,2) = (4,-6,-3)$, och formlerna $f'_x = -F'_x/F'_z$, $f'_y = -F'_y/F'_z$ ger $f'_x(0,1) = -4/(-3) = 4/3$ och $f'_y(0,1) = -(-6)/(-3) = -2$.

(Det går förstås också bra att ta fram svaret via implicit derivering, dvs. genom att direkt derivera identiteten $x^3 - 3yf(x,y) + e^{xf(x,y)^2} = -5$ med avseende på x respektive y; då behöver man ju inte komma ihåg de där formlerna.)

(c) Taylorutvecklingen av första ordningen kring punkten $(x,y) = (0,1)$ är

$$z = f(x,y) = f(0,1) + f'_x(0,1)\,x + f'_y(0,1)\,(y-1) + O(\rho^2),$$

där $\rho = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Försummande av resttermen ger den linjära approximationen av z:s värde:

$$\begin{aligned} z &\approx f(0,1) + f'_x(0,1)\,x + f'_y(0,1)\,(y-1) \\ &= 2 + (4/3) \cdot 0{,}003 + (-2) \cdot (-0{,}001) \\ &= 2 + 0{,}004 + 0{,}002 = 2{,}006. \end{aligned}$$

(Anmärkningar: Enbart baserat på informationen från (b) är detta den bästa gissning vi kan göra, men notera att denna enkla undersökning inte ger någon information om resttermens storlek, och därmed har vi ingen uppfattning om hur nära punkten $(0,1)$ man egentligen måste vara för att den linjära approximationen ska bli bra. Numerisk lösning av ekvationen $0{,}003^3 - 3 \cdot 0{,}999 \cdot z + e^{0{,}003 \cdot z^2} = -5$ ger i alla fall $z \approx 2{,}0060547$, vilket visar att vi hade tur: vår uppskattning $z \approx 2{,}006$ hamnade faktiskt inte så långt ifrån det sanna värdet. Det finns också en annan lösning $z \approx 39{,}7366$, så ekvationen $F(x,y,z) = -5$ definierar inte z som funktion av x och y globalt sett.)

Svar: (b) $f(0,1) = 2$, $f'_x(0,1) = 4/3$, $f'_y(0,1) = -2$. (c) $z \approx 2{,}006$.

5. Vi betraktar tvärsnittet D_x för fixt x, dvs. alla punkter $(y, z) \in \mathbf{R}^2$ som uppfyller $y \geq 0$, $z \geq 0$, $-y + z \leq 1 - x$, $y \leq 1 - x^2$. För att olikheten $0 \leq y \leq 1 - x^2$ ska kunna gälla måste vi ha $x^2 \leq 1$, alltså $-1 \leq x \leq 1$. För z har vi $0 \leq z \leq y + (1 - x)$. Tvärsnittet D_x blir alltså en fyrhörning i yz-planet som begränsas av linjerna $y = 0$, $y = 1 - x^2$, $z = 0$ och $z = y + (1 - x)$. En enkel figur visar att detta område består av en triangel (en halv kvadrat med sidlängden $1 - x^2$) staplad ovanpå en rektangel med bredden $1 - x^2$ och höjden $1 - x$. Arean av D_x är därmed $A(x) = (1 - x^2)(1 - x) + \frac{1}{2}(1 - x^2)^2$, och volymen är $\iiint_D dxdydz = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = 28/15$.

   Ett annat alternativ är att använda stavar i z-led. Områdets projektion E i xy-planet ges av $0 \leq y \leq 1 - x^2$ och $0 \leq 1 - x + y$, men den andra olikheten är automatiskt uppfylld om den första är det, så E avgränsas alltså av x-axeln och parabeln $y = 1 - x^2$. Till varje punkt $(x, y) \in E$ hör en stav $0 \leq z \leq 1 - x + y$, så volymen är $\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=0}^{1-x+y} dz \right) dxdy = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x^2} (1 - x + y)\, dy \right) dx = 28/15$.

   Svar: Volymen av D är $28/15$.

6. För $(x, y) \neq (0, 0)$ ges f:s partiella derivator av

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$f'_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

   och eftersom f är konstant $(= 0)$ längs båda axlarna inklusive origo så är $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. För att ta fram $f''_{yx}(0, 0)$ undersöker vi hur värdet på f'_y varierar längs x-axeln. Vi har $f'_y(x, 0) = x$ för alla x (inklusive $x = 0$, enligt det speciellt uträknade värdet $f'_x(0, 0) = 0$), och derivering av detta m.a.p. x visar att $f''_{yx}(x, 0) = 1$ för alla x (inklusive $x = 0$). Och på liknande sätt: $f'_x(0, y) = 0$ för alla y (inklusive $y = 0$) ger derivatan $f''_{xy}(0, y) = 0$ för alla y (inklusive $y = 0$).

   Svar: $f''_{xy}(0, 0) = 0$ och $f''_{yx}(0, 0) = 1$.