Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2015-01-07

1. Kurvan $(x(t), y(t)) = (t^3 - 2t, t^2)$ passerar punkten $(1, 1)$ då $t^3 - 2t = 1$ och $t^2 = 1$, dvs. då $t = -1$. Kurvans tangentvektor $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2-2 \\ 2t \end{pmatrix}$ är därför i den punkten lika med $\begin{pmatrix} x'(-1) \\ y'(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Enhetsvektorn i denna riktning är $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, och gradienten av $f(x, y) = 2 - \arctan(x^2 + 3y^2)$ är $\nabla f(x, y) = \frac{-2}{1+(x^2+3y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$, så den efterfrågade riktningsderivatan är

$$f'_{\mathbf{v}}(1, 1) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-2}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{17\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{17}.$$

Riktningsderivatan är som störst i gradientens riktning (alltså den riktning som ges av vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$) och dess maximala värde är $|\nabla f(1, 1)| = \left|\frac{-2}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{2\sqrt{10}}{17}$.

Svar: Funktionen ökar med hastigheten $2\sqrt{5}/17$ enheter per längdenhet när man går i kurvtangentens riktning. Den maximala förändringstakten är $2\sqrt{10}/17$ och sker i riktningen $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Funktionen $f(x, y, z) = \frac{z}{y} - \frac{x}{z} - \frac{1}{x} + \ln y$ är definierad för $x \neq 0$, $y > 0$, $z \neq 0$, och dess gradient är

$$\nabla f(x, y, z) = (-\frac{1}{z} + \frac{1}{x^2}, -\frac{z}{y^2} + \frac{1}{y}, \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2}).$$

Stationära punkter ges av $\nabla f = \mathbf{0}$, dvs. $x^2 = z$, $y^2 = yz$, $xy = -z^2$. Den andra ekvationen säger (eftersom $y > 0$) att $y = z$, vilket insatt i den tredje ger $xz = -z^2$. Eftersom $z \neq 0$ så medför detta att $x = -z$, och ur den första ekvationen får vi till slut $z = 1$. Alltså är $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$ den enda stationära punkten för f. Andraderivatorna i denna punkt är $f''_{xx} = \frac{-2}{x^3} = 2$, $f''_{yy} = \frac{2z}{y^3} - \frac{1}{y^2} = 1$, $f''_{zz} = \frac{-2x}{z^3} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = \frac{1}{z^2} = 1$, $f''_{yz} = \frac{-1}{y^2} = -1$, så den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen $f(-1 + h, 1 + k, 1 + l) = f(-1, 1, 1) + 0h + 0k + 0l + \frac{1}{2}Q(h, k, l) + \mathcal{O}((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2})$ blir

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= 2h^2 + k^2 + 2l^2 + 0hk + 2hl - 2kl \\ &= (k - l)^2 + l^2 + 2h^2 + 2hl \\ &= (k - l)^2 + (l + h)^2 + h^2. \end{aligned}$$

Detta visar (enligt det vanliga resonemanget) att Q är positivt definit och att f därmed har ett lokalt minimum i den aktuella punkten.

Svar: Funktionen saknar lokala maximipunkter, men $(-1, 1, 1)$ är en lokal minimipunkt.

3. Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ delar klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ i två delar, en del D som ligger ovanför paraboloiden och en annan del E som ligger under. Vi beräknar volymen av D nedan. (Men vi godkänner även svar där man tolkat frågan som att det är volymen av E som söks.)

Låt $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ som vanligt. Sfären $\rho^2 + z^2 = 6$ och paraboloiden $z = \rho^2$ skär varandra längs den cirkel som ges av $z = 2$ och $\rho = \sqrt{2}$ (vilket man ser genom att lösa ekvationen $z + z^2 = 6$ där $z = \rho^2 \geq 0$). Kroppen D avgränsas alltså av ett ”tak” som består av den del av sfären som ligger ovanför höjden $z = 2$, och ett ”golv” som består av den del av paraboloiden som ligger under höjden $z = 2$.

Tvärsnitten D_z för fixt $z \in [0, \sqrt{6}]$ är cirkelskivor, vars areor $\pi\rho^2$ förstås är lätta att beräkna; man behöver bara ta hänsyn till att det blir olika beroende på om man snittar i taket (där radien blir $\rho = \sqrt{6 - z^2}$) eller i golvet (där radien blir $\rho = \sqrt{z}$):

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(D) &= \iiint_D dxdydz = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz = \int_0^{\sqrt{6}} \text{Area}(D_z)\, dz \\
&= \int_0^2 \pi\left(\sqrt{z}\right)^2 dz + \int_2^{\sqrt{6}} \pi\left(\sqrt{6 - z^2}\right)^2 dz \\
&= \pi \int_0^2 z\, dz + \pi \int_2^{\sqrt{6}} (6 - z^2)\, dz = \pi \left(4\sqrt{6} - \frac{22}{3} \right).
\end{aligned}$$

Alternativt kan man beräkna volymen genom att dela upp kroppen i stavar som löper i z-led från golvet till taket, ovanför kroppens projektion E i xy-planet, som är en cirkelskiva med radien $\sqrt{2}$ (enligt skärningsberäkningen vi gjorde i början). Integrationen över E utförs lämpligen med hjälp av polära koordinater:

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \right) dxdy \\
&= \iint_E \left(\sqrt{6 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2) \right) dxdy \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{6 - \rho^2} - \rho^2 \right) \rho\, d\rho = 2\pi \left(2\sqrt{6} - \frac{11}{3} \right).
\end{aligned}$$

Svar: $2\pi \left(2\sqrt{6} - \frac{11}{3}\right)$.

4. Kurvan $x = y^2$ är en nivåkurva till $F(x, y) = x - y^2$, så dess normallinje N i punkten $P = (a, b)$ har riktningsvektorn $\nabla F(a, b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2b \end{smallmatrix}\right)$. Kravet för att linjen N ska gå genom punkten $(2, -1)$ är att dess riktningsvektor är parallell med den vektor som går mellan punkterna $(2, -1)$ och (a, b), alltså att $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2b \end{smallmatrix}\right)$ är parallell med $\left(\begin{smallmatrix} a-2 \\ b+1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & a - 2 \\ -2b & b + 1 \end{pmatrix} = (b + 1) + 2b(a - 2) = 2ab - 3b + 1.$$

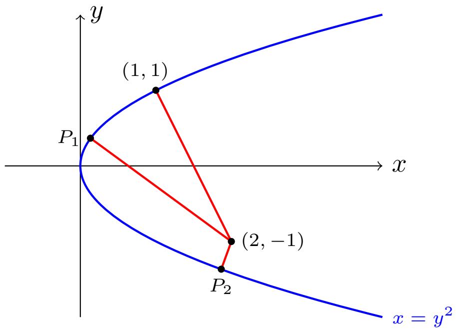
Insättning av villkoret $a = b^2$ (punkten (a, b) ska ju ligga på kurvan) ger en tredjegradsekvation där det är lätt att gissa en av rötterna (nämligen $b = 1$):

$$0 = 2b^3 - 3b + 1 = (b - 1)(2b^2 + 2b - 1).$$

De andra två rötterna blir därmed $b = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$. Kvadrering av de funna värdena för b ger motsvarande värden för a.

Svar: Punkterna är $(1, 1)$, $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ och $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Anm.: Man kan enkelt kontrollera att svaret är rimligt med hjälp av närmevärdet $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ och följande figur:



5. Linjerna $y = 0$ och $y = x$ delar in halvcirkelskivan $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ i tre delar,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D \colon y \leq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in D \colon 0 < y < x\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in D \colon x \leq y\}, \end{aligned}$$

där $y^2 - xy = y(y - x) \geq 0$ om $(x, y) \in D_1$ eller $(x, y) \in D_3$, medan $y^2 - xy < 0$ om $(x, y) \in D_2$. Alltså får vi, med hjälp av polära koordinater,

$$\begin{aligned} &\iint_D \max(0, y^2 - xy)\, dxdy \\ &= \iint_{D_1} (y^2 - xy)\, dxdy + \iint_{D_2} 0\, dxdy + \iint_{D_3} (y^2 - xy)\, dxdy \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{0} \left(\int_{\rho=0}^{1} (\rho^2 \sin^2\varphi - \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi) \rho\, d\rho \right) d\varphi \\ &\quad + 0 + \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{1} (\rho^2 \sin^2\varphi - \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi) \rho\, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{0} (\sin^2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

En primitiv funktion till

$$g(\varphi) = \sin^2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi$$

är

$$G(\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi,$$

så integralens värde blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\Big[G(\varphi)\Big]_{-\pi/2}^{0} + \frac{1}{4}\Big[G(\varphi)\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} &= \frac{1}{4}\left((0 - 0 - 0) - \left(-\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{1}{8} + \dfrac{3\pi}{32}$.

6. Sätt $F(x,y,z) = z + \sin xyz$ och $G(x,y,z) = x^3y^2 + xy + yz$. Då är F och G funktioner av klass $\mathcal{C}^1$ (eftersom de är bildade genom sammansättning av elementära funktioner), punkten $(x,y,z) = (0,2,1)$ uppfyller ekvationssystemet $F(x,y,z) = 1$, $G(x,y,z) = 2$, och determinanten

$$\det \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} yz\cos xyz & xz\cos xyz \\ 3x^2y^2 + y & 2x^3y + x + z \end{pmatrix}$$

har i punkten $(0,2,1)$ värdet

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Förutsättningarna för implicita funktionssatsen är alltså uppfyllda, och den säger att ekvationssystemet $F = 1$, $G = 2$ implicit definierar funktioner $x = f(z)$ och $y = g(z)$ i en omgivning av punkten $(0,2,1)$, vilket skulle visas. Per definition är $f(1) = 0$ och $g(1) = 2$, och implicit derivering av identiteterna $F = 1$, $G = 2$ ger

$$\begin{pmatrix} yz\cos xyz & xz\cos xyz \\ 3x^2y^2 + y & 2x^3y + x + z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx/dz \\ dy/dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + xy\cos xyz \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där $x = f(z)$ och $y = g(z)$. Insättning av $z = 1$ ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alltså $f'(1) = -1/2$ och $g'(1) = -1$.

Svar: Bevis enligt ovan. De efterfrågade värdena är $f(1) = 0$, $g(1) = 2$, $f'(1) = -1/2$, $g'(1) = -1$.