Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2015-06-03

1. Det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = y + z, \\ w = x - z, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad dudvdw = \left|-2\right| dxdydz = 2\, dxdydz,$$

ger nytt område $E : 0 \le u \le v \le 1,\ 0 \le w \le 1$, och, med skivor på fixa w-nivåer,

$$\iiint_D (x+y)\, dxdydz = \iiint_E (v+w) \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^v (v+w)\, du \right) dv \right) dw$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^1 (v^2 + vw)\, dv \right) dw = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right) dw = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}.$$

2. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x^2 - 2x + 4y = 0$ och $f'_y = -4y + 4x = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $2x^2 + 2x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = -1$. De stationära punkterna är således $(0,0)$ och $(-1,-1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4x - 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= -2h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 + 2h^2$$

   är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,1) = 2 > 0$ medan $Q(0,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(-1,-1)$ blir $f''_{xx} = -6$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -6h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 - 2h^2$$

   som är negativt definit eftersom $Q(h,k) \le 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(-1,-1)$ en lokal maximipunkt för f.

   Svar: $(-1,-1)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan där $z = x^2 + y^2$ och $z = 4 - 2x + 4y$ samtidigt, och denna kurvas projektion på xy-planet är kurvan $x^2 + y^2 = 4 - 2x + 4y$, d.v.s. cirkeln $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Låt D vara den aktuella kroppen; dess projektion $\tilde{D}$ på xy-planet är cirkelskivan $(x+1)^2 + (y-2)^2 \le 9$. Med i tur och ordning (1) stavar $x^2 + y^2 \le z \le 4 - 2x + 4y$ i z-led; (2) linjärt byte $u = x + 1$, $v = y - 2$ som överför $\tilde{D}$ till en ny mängd $\tilde{E} : u^2 + v^2 \le 9$ och ger $dxdy = dudv$; och (3) planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, får vi att

$$\text{volym}(D) = \iiint_D dxdydz \overset{(1)}{=} \iint_{\tilde{D}} \big((4 - 2x + 4y) - (x^2 + y^2)\big)\, dxdy \overset{(2)}{=} \iint_{\tilde{E}} (9 - u^2 - v^2)\, dudv$$
$$\overset{(3)}{=} \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) (9 - \rho^2)\rho\, d\rho = 2\pi \left[\frac{(9-\rho^2)^2}{-4} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}.$$

4. För att bestämma de punkter där linjen skär ytan sätter man in $x = 1 + 2t$, $y = 3$, $z = 2 + t$ i ytans ekvation och löser ut t:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x,y,z) = x^3 - 4z^3 + 2xyz + 9z \\ &= (1+2t)^3 - 4(2+t)^3 + 6(1+2t)(2+t) + 9(2+t) \\ &= 4t^3 - 3t - 1 = (t-1)(2t+1)^2, \end{aligned}$$

alltså $t = 1$ eller $t = -1/2$, vilket ger punkterna $(3,3,3)$ och $(0,3,3/2)$.

Ur $\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + 2yz, 2xz, -12z^2 + 2xy + 9)$ fås $\nabla f(3,3,3) = 9(5,2,-9)$ och $\nabla f(0,3,3/2) = 9(1,0,-2)$, så vi kan ta $(5,2,-9)$ och $(1,0,-2)$ som normalvektor till tangentplanet i respektive punkt.

<u>Svar</u>: Tangentplanet i $(3,3,3)$ är $5x + 2y - 9z = -6$, och tangentplanet i $(0,3,3/2)$ är $x - 2z = -3$.

5. Integration av den första ekvationen m.a.p. x ger $u = 2x\sin^2 y - xz + f(y,z)$, och derivering av u m.a.p. y och insättning i den andra ekvationen ger $2x \cdot 2\sin y \cos y + f'_y(y,z) = 2x\sin 2y - z\sin y$, d.v.s. $f'_y(y,z) = -z\sin y$ (eftersom $\sin 2y = 2\sin y\cos y$), varför $f(y,z) = z\cos y + h(z)$. Således är $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + h(z)$, och bivillkoret ger nu $x = u(x,0,x) = -x^2 + x + h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, d.v.s. $h(t) = t^2$, $t \in \mathbf{R}$, och därmed är $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + z^2$.

<u>Svar</u>: $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + z^2$.

6. Låt i (a) och (b) $F(x,y,z) = yz^3 + e^{xz} - 3x^2y$ och $G(x,y,z) = \ln(x+y) + x^2yz$. Då är F och G $\mathcal{C}^1$-funktioner i en omgivning till punkten $P = (0,2,1)$, och $F(0,2,1) = 3$ och $G(0,2,1) = \ln 2$.

   (a) Eftersom $F'_x = z\,e^{xz} - 6xy = 1 \neq 0$ i P medför implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y,z) = 3$ i en omgivning till $(0,2,1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = f(y,z)$.

   (b) Eftersom

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{pmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\,e^{xz} - 6xy & 3yz^2 + x\,e^{xz} \\ (x+y)^{-1} + 2xyz & x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   i P, och denna matris har determinant $-3 \neq 0$ och därmed är inverterbar, medför implicita funktionssatsen att ekvationssystemet $F(x,y,z) = 3$, $G(x,y,z) = \ln 2$ i en omgivning till $(0,2,1)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x = g(y)$ och $z = h(y)$.

   (c) Funktionerna $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ och $w = x^3 + y^3 + z^3$ är alla $\mathcal{C}^1$, och

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+z & x-y & x-z \\ x^2 & y^2 - x^2 & z^2 - x^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3(x-y)(x-z)(y-z),$$

   där vi i steg 1 har brutit ut faktorn 3 från rad 3 och sedan subtraherat kolonn 1 från kolonn 2 och kolonn 3, och i steg 2 har brutit ut faktorn $(x-y)$ ur kolonn 2 och $(x-z)$ ur kolonn 3. Om (x,y,z) är en punkt sådan att $x \neq y$, $y \neq z$ och $z \neq x$ är alltså funktionaldeterminanten $\neq 0$ där, och därför medför inversa funktionssatsen att det finns en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ i en omgivning till punkten.