Lösningsskisser till tentamen i TATA69 Flervariabelanalys 2015-08-20

1. Sätt $F(x, y, z) = xy + yz + xz$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med planet $x + 2y + z = 3$ precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (1, 2, 1)$ och $F(a, b, c) = 1$, d.v.s. precis då
$$(b + c, a + c, a + b) \parallel (1, 2, 1) \quad \text{och} \quad ab + bc + ac = 1.$$
Det första villkoret ger $a = c$ och $b = 0$, som insatt i det andra ger $c^2 = 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1, 0, 1)$ och $(-1, 0, -1)$, med tangentplanen $x + 2y + z = 2$ respektive $x + 2y + z = -2$.

   Svar: Planen är $x + 2y + z = \pm 2$.

2. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2xy - 4x = 0$ och $f'_y = x^2 - 2y = 0$. Den andra ekvationen ger $y = x^2/2$, som insatt i den första ger $x^3 - 4x = 0$, d.v.s. $x = \pm 2$ eller $x = 0$. Vi får således tre stationära punkter: $(2, 2)$, $(-2, 2)$ och $(0, 0)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2y - 4$, $f''_{xy} = 2x$, $f''_{yy} = -2$.

   I punkten $(2, 2)$ är $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = 4$, så vi får den kvadratiska formen
$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= -2k^2 + 8hk = -2(k - 2h)^2 + 8h^2, \end{aligned}$$
som är indefinit: exempelvis är $Q(0, 1) = -2 < 0$ medan $Q(1, 2) = 8 > 0$. Alltså är $(2, 2)$ ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(-2, 2)$ blir fortfarande $f''_{xx} = 0$ medan $f''_{xy} = -4$, och vi får helt analogt $Q(h, k) = -2k^2 - 8hk = -2(k + 2h)^2 + 8h^2$, som också är infinit eftersom exempelvis $Q(0, 1) = -2 < 0$ medan $Q(-1, 2) = 8 > 0$. Alltså är inte heller $(-2, 2)$ någon lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(0, 0)$, slutligen, är $f''_{xx} = -4$ och $f''_{xy} = 0$, så $Q(h, k) = -4h^2 - 2k^2$, som är negativt definit eftersom $Q(h, k) \le 0$ för alla (h, k), och $Q(h, k) = 0$ endast om $h = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Alltså är punkten $(x, y) = (0, 0)$ en lokal maximipunkt för f.

   Svar: $(0, 0)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Börja med det linjära bytet $u = x$, $v = 2y$, $w = z$; då är $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 2$ så att $dxdydz = dudvdw/2$, och det nya området E ges av $u^2 + v^2 + w^2 \le 4$, $w \le 0$, $v \le u$. Byt därefter till rymdpolära koordinater: $u = r \sin\theta \cos\varphi$, $v = r \sin\theta \sin\varphi$, $w = r \cos\theta$ med $dudvdw = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$. Gränserna blir $0 \le r \le 2$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$, $-3\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$. Allt som allt:
$$\begin{aligned} \iiint_D (x - y) z \, dxdydz &= \iiint_E \frac{(2u - v)w}{2} \frac{dudvdw}{2} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^4 \, dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (2\cos\varphi - \sin\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} [2\sin\varphi + \cos\varphi]_{-3\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{2} = -\frac{8\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

4. Kedjeregeln ger $f'_x(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2x$ och $f'_y(x, y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2y$, så den givna ekvationen reduceras till
$$2(x^2 + y^2) \, g'(x^2 + y^2) = 6 + x^2 + y^2,$$

alltså

$$g'(t) = \frac{6+t}{2t}, \qquad t > 0.$$

Integration ger $g(t) = 3\ln t + t/2 + C$.

Svar: $g(t) = 3\ln t + t/2 + C$, där C är en godtycklig konstant.

5. Med stavar i z-led får vi stavarna $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$, och projektionen $\widetilde{D}$ på xy-planet ges av $x^2 + y^2 \leq 2$ och $y \geq |x|$, som kan skrivas $-1 \leq x \leq 1$, $|x| \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$ (rita figur!). Således blir

$$\iiint_D y\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} y\,dz \right) dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2)\,y\,dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{(2-x^2-y^2)^2}{-4} \right]_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4)\,dx = \frac{16}{15}.$$

6. Avbildningen är $\mathcal{C}^1$, och $(x,y) = (1,2)$ avbildas på $(u,v) = (-1,0)$. Funktionalmatrisen i punkten $(x,y) = (1,2)$ är

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2-y & -x \\ 2y & 2x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

och eftersom denna matris är inverterbar (determinanten $= 2 \neq 0$) medför inversa funktionssatsen att avbildningen har en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u,v)$, $y(u,v)$ definierad i någon omgivning till $(u,v) = (-1,0)$. Trivialt är $x = 1$ och $y = 2$ när $(u,v) = (-1,0)$, medan derivatorna där fås med matrisinvers:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Svar: I punkten $(u,v) = (-1,0)$ är $x = 1$, $y = 2$ och $x'_u = -1$, $x'_v = 1/2$, $y'_u = -2$, $y'_v = 1/2$.