Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2015-10-26

1. Från $f(x,y) = 2x^2 - 12xy + 9y^4$ fås $\nabla f = (4x - 12y, -12x + 36y^3)$. Stationära punkter bestäms ur ekvationen $\nabla f = \mathbf{0}$, dvs. $3y = x = 3y^3$, vilket ger $(x,y) = (0,0)$ eller $\pm(3,1)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = -12$, $f''_{yy} = 108y^2$, så den kvadratiska formen Q i Taylorutvecklingen kring respektive punkt blir
$$Q_{(0,0)}(h,k) = 4h^2 - 24hk + 0y^2 = 4\Big((h-3k)^2 - 9k^2\Big),$$
som är indefinit eftersom t.ex. $Q_{(0,0)}(1,0) = 4 \cdot 1 > 0$ och $Q_{(0,0)}(3,1) = 4 \cdot (-9) < 0$, och
$$Q_{(3,1)}(h,k) = Q_{(-3,-1)}(h,k) = 4h^2 - 24hk + 108k^2 = 4\Big((h-3k)^2 + 18k^2\Big),$$
som är positivt definit eftersom $Q_{\pm(3,1)} \geq 0$ överallt med likhet bara om $h - 3k = 0$ och $k = 0$, dvs. bara om $(h,k) = (0,0)$. Alltså är $(0,0)$ en sadelpunkt, och $\pm(3,1)$ är lokala minimipunkter. (Värdena i dessa punkter är $f(0,0) = 0$ respektive $f(3,1) = f(-3,-1) = -9$.)

   Svar: $(3,1)$ och $(-3,-1)$ är lokala minimipunkter. Funktionen saknar lokala maximipunkter.

2. (a) Vi sätter $x = z = 0$ i ellipsoidens ekvation för att hitta skärningspunkterna P och Q; detta ger $5y^2 = 5$, så punkterna är $(0, \pm 1, 0)$. Ellipsoidens normalvektor ges av gradienten
$$\nabla\Big((x-y+z)^2 + (2y-z)^2 + 3z^2\Big) = \begin{pmatrix} 2(x-y+z) \\ -2(x-y+z) + 4(2y-z) \\ 2(x-y+z) - 2(2y-z) + 6z \end{pmatrix},$$
som är lika med
$$\pm 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$
då $(x,y,z) = \pm(0,1,0)$. Tangentplanen blir alltså $-x + 5y - 3z = D$, där insättning av de två punkterna ger $D = \pm 5$.

   Svar: Tangentplanen är $-x + 5y - 3z = 5$ och $-x + 5y - 3z = -5$.

   (b) Linjen $(x,y,z) = (-t, 5t, -3t)$ är vinkelrät mot planen och skär dem då $35t = \pm 5$, alltså $t = \pm 1/7$. Avståndet mellan planen är därmed $2/7$ gånger längden hos vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, alltså $\frac{2}{7} \cdot \sqrt{35}$.

   Svar: Avståndet mellan de två planen är $2\sqrt{5}/\sqrt{7}$.

3. Integranden e^x är positiv överallt, så vi kan använda variabelbyte och upprepad integration. Med $u = 3x - y$ och $v = x - 2y$ fås ett enklare område E som ges av $0 \le u \le 1$ och $0 \le v$. Vidare är $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -5$, så $du dv = |-5|\, dx dy = 5\, dx dy$. Alltså:

$$\iint_D e^x dx dy = \frac{1}{5} \iint_E e^{(2u-v)/5} du dv = \frac{1}{5} \int_{v=0}^{\infty} \left(\int_{u=0}^{1} e^{2u/5} e^{-v/5} du \right) dv$$
$$= \tfrac{1}{5} \left[\tfrac{5}{2} e^{2u/5} \right]_{u=0}^{1} \cdot \left(\lim_{\omega \to \infty} \left[-5e^{-v/5} \right]_{v=0}^{\omega} \right) = \tfrac{5}{2}(e^{2/5} - 1).$$

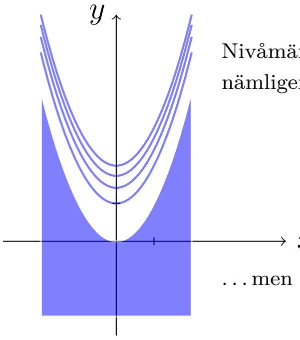
Svar: $\frac{5}{2}(e^{2/5} - 1)$.

4. (a) Enligt kedjeregeln är $f'_x(x,y) = g'(y - x^2) \cdot (-2x)$ och $f'_y(x,y) = g'(y - x^2) \cdot 1$, vilket medför att $f'_x + 2x\, f'_y = 0$.

   (b) Svaret ”parablerna $y = x^2 + C$ är nivåkurvor” godkänns.

   Generellt sett kan dock situationen vara en aning mer komplicerad. Om punkten (x,y) ligger på parabeln $y = x^2 + C$ så är $f(x,y) = g(y - x^2) = g(C)$, dvs. f har samma värde $g(C)$ i alla punkter på denna parabel. Givet en konstant D består nivåmängden $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = D\}$ alltså av *unionen* av alla parabler $y = x^2 + C$ sådana att $g(C) = D$. (Eller så är den tomma mängden, ifall det inte finns några sådana C.)

   För att ta ett konkret exempel: om $g(t) = t^2$ för $t > 0$ och $g(t) = 0$ för $t \le 0$ så kommer f:s nivåmängder för $D = 0, 1, 2, 3, 4$ att se ut något i den här stilen:



Nivåmängden $\{f = D\}$ är en nivåkurva om $D > 0$, nämligen parabeln $y = x^2 + \sqrt{D} \ldots$

$\ldots$ men nivåmängden $\{f = 0\}$ består av hela området $y \le x^2$.

   (c) Variabelbytet $u = x$ och $v = y - x^2$ ger $f'_x = f'_u - 2x\, f'_v$ och $f'_y = f'_v$ så att PDEn blir $f'_u = y = v + u^2$, med allmän lösning $f = uv + \frac{1}{3}u^3 + g(v) = xy - \frac{2}{3}x^3 + g(y - x^2)$.

   Svar: $f(x,y) = xy - \frac{2}{3}x^3 + g(y - x^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

5. Kroppen utgörs av de punkter som ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och innanför cylindern $y^2 + z^2 = 1$. Den kan därmed lika gärna beskrivas med olikheten $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - y^2}$, vilket gör det lämpligt att beräkna integralen med stavar i z-led, över det område E i xy-planet som ges av $\sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{1 - y^2}$, dvs. ellipsen $x^2 + 2y^2 \le 1$. Omskalningen $(x, y) = (u, v/\sqrt{2})$ ändrar området till $u^2 + v^2 \le 1$, dvs. enhetscirkelskivan i uv-planet (kalla den F), och därefter är det lämpligt att gå över till planpolära koordinater:

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \iint_E \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz \right) dxdy \\
&= \iint_E \tfrac{1}{2}\Big((1 - y^2) - (x^2 + y^2) \Big) dxdy \\
&= \iint_F \tfrac{1}{2}(1 - u^2 - v^2) \frac{dudv}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{1} (1 - \rho^2)\,\rho\,d\rho \right) d\varphi = \cdots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Ett alternativ är att för fixt $x \in [-1, 1]$ betrakta tvärsnittet D_x, som är den mängd i yz-planet som ligger innanför cirkeln $y^2 + z^2 = 1$ och ovanför hyperbelgrenen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dessa kurvor skär varandra då $y = \pm\sqrt{(1 - x^2)/2}$, och vi får

$$\begin{aligned}
\iiint_D z\,dxdydz &= \int_{x=-1}^{1} \left(\iint_{D_x} z\,dydz \right) dx \\
&= 2 \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-\sqrt{(1-x^2)/2}}^{\sqrt{(1-x^2)/2}} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \cdots = 2 \int_{x=0}^{1} \frac{\sqrt{2}}{3} (1 - x^2)^{3/2}\,dx = \cdots = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Tvärsnitt för fixt y är ännu ett alternativ, av ungefär samma svårighetsgrad. (Tvärsnitt för fixt z är däremot inte att rekommendera; det är i princip genomförbart, men man måste integrera över intervallen $0 \le z \le 1/\sqrt{2}$ och $1/\sqrt{2} \le z \le 1$ separat, och den andra av dessa två integraler, där cylindern så att säga börjar nagga konen i kanten, leder till rätt förfärliga primitivuträkningar.)

Svar: $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

6. Differentierbarhet i origo betyder att de partiella derivatorna i origo existerar och att uttrycket

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)\,x - f'_y(0,0)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

har gränsvärdet noll då $(x,y) \to (0,0)$. Längs axlarna (inklusive origo!) har vi $f(x,0) = x$ och $f(0,y) = 0$, vilket visar att $f'_x(0,0) = 1$ och $f'_y(0,0) = 0$. Uttrycket att undersöka blir alltså

$$\frac{\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+y^2} - 0 - 1\cdot x - 0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Uttryckt i polära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ blir detta lika med $\cos\varphi\sin\varphi\,(\cos\varphi - \sin\varphi)$ (oberoende av ρ), vilket visar att man får olika värden när man närmar sig origo längs olika räta linjer; t.ex. får man 0 längs x-axeln men $-1/\sqrt{2}$ längs linjen $y = -x$. Gränsvärdet existerar därmed inte, vilket visar att f inte är differentierbar i origo.

Svar: Nej, f är inte differentierbar i punkten $(0,0)$.