Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2015-10-26 kl. 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen
$$f(x, y) = 2x^2 - 12xy + 9y^4.$$

2. Låt P och Q vara de två punkter i $\mathbf{R}^3$ där y-axeln skär ellipsoiden $(x - y + z)^2 + (2y - z)^2 + 3z^2 = 5$.
   (a) Bestäm ellipsoidens tangentplan i punkten P och i punkten Q. (2p)
   (b) Beräkna avståndet mellan dessa två plan. (1p)

3. Låt D vara det obegränsade område i $\mathbf{R}^2$ som bestäms av olikheterna $0 \leq 3x - y \leq 1$ och $0 \leq x - 2y$. Beräkna värdet hos den generaliserade integralen
$$\iint_D e^x \, dxdy$$
om den är konvergent, annars visa att den är divergent.

4. (a) Om tvåvariabelfunktionen f har bildats genom att sätta $f(x, y) = g(y - x^2)$, där g är en envariabelfunktion av klass $\mathcal{C}^1$, vad blir då $f'_x(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ (uttryckt i g)? Och vad blir $f'_x(x, y) + 2x\, f'_y(x, y)$?
   (b) Vad kan man säga om nivåmängdernas utseende för en funktion f bildad på ovanstående sätt? Illustrera med en figur.
   (c) Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $f(x, y)$ som uppfyller $f'_x + 2x\, f'_y = y$.
   (Gör t.ex. ett variabelbyte där $u = x$ är den ena nya variabeln, och där den andra variabeln v väljs med inspiration av de föregående deluppgifterna.)

5. Beräkna $\iiint_D z \, dxdydz$, där
$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ och } y^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

6. Undersök om följande funktion är differentierbar i punkten $(0, 0)$:
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$