Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-01-07

1. Med det föreslagna variabelbytet fås

$$x\,f'_x + 2y\,f'_y = x\,(f'_u + \tfrac{2x}{y}\,f'_v) + 2y\,(-\tfrac{x^2}{y^2}\,f'_v) = x\,f'_u,$$

så PDE:n övergår i $x\,f'_u = x^2$, dvs. $f'_u = u$. Den allmänna lösningen är alltså $f = u^2/2 + g(v) = x^2/2 + g(x^2/y)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret $f(x,1) = x^2$ ger $x^2/2 + g(x^2) = x^2$, alltså $t/2 + g(t) = t$, alltså $g(t) = t/2$.

Svar: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2y}$.

2. Byte till rymdpolära koordinater ger ett nytt område E, som beskrivs av $0 \le r \le \sqrt{3}$, $0 \le \theta \le \pi/2$ och (t.ex.) $-5\pi/4 \le \varphi \le -\pi/4$. Integralen blir därmed

$$\begin{aligned}\iiint_D xz\,dxdydz &= \iiint_E r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\sin\varphi\right]_{\varphi=-5\pi/4}^{-\pi/4} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$

Svar: $-3\sqrt{6}/5$.

3. Stationära punkter fås ur villkoret $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$; detta ger ett linjärt ekvationssystem med den enda lösningen $(x,y,z) = (-1,-1,2)$. På vanligt sätt finner vi $f(-1+h,-1+k,2+l) = 2 + Q(h,k,l)$, där

$$Q(h,k,l) = -(3h^2 + k^2 + l^2 - 2hk + 2hl) = -(k-h)^2 - (l+h)^2 - h^2.$$

(Resttermen i Taylorutvecklingen är faktiskt noll i detta fall; funktionen f själv innehåller ju inga termer av grad högre än två.) Det är uppenbart att $Q \le 0$ alltid, och $Q = 0$ bara om $k-h = l+h = h = 0$, dvs. om $h = k = l = 0$. Därmed är Q negativt definit, och $f(-1,-1,2) = 2$ är ett strängt lokalt maximum.

Svar: $(-1,-1,2)$ är en lokal maximipunkt.

4. Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Tangentplanet till nivåytan $f = 1$ i punkten (a,b,c) har $\nabla f(a,b,c) = (2a, 2b, -2c)$ som normalvektor, och det har alltså ekvationen $a(x-a) + b(y-b) + (-c)(z-c) = 0$, vilket kan skrivas som
$$ax + by - cz = 1, \tag{*}$$
eftersom punkten måste uppfylla $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ för att ligga på ytan. Detta plan innehåller punkterna $(3,2,2)$ och $(5,3,3)$ om och endast om
$$3a + 2b - 2c = 1 \quad \text{och} \quad 5a + 3b - 3c = 1,$$
dvs. $(a,b,c) = (-1, 2+t, t)$ där $t \in \mathbf{R}$. Det enda värde på t för vilket detta uppfyller ytans ekvation $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ är $t = -1$. Alltså är $(a,b,c) = (-1,1,-1)$ vilket sätts in i $(*)$ ovan för att få svaret.

Svar: Det enda sådana planet är $-x + y + z = 1$.

5. Integranden $f(x,y) = xy - 1$ växlar tecken i området (längs kurvan $xy = 1$), så vi måste undersöka den positiva delen och den negativa delen var för sig. Den positiva delen fås genom att integrera över området D^+ som ges av $x \geq 2$, $y \geq 0$ och $1 \leq xy \leq 2$:
$$\begin{aligned}\iint_{D^+} (xy-1)\,dxdy &= \int_{x=2}^{\infty} \left(\int_{y=1/x}^{2/x} x\left(y - \tfrac{1}{x}\right) dy \right) dx \\ &= \int_{x=2}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2} x \left(y - \tfrac{1}{x}\right)^2 \right]_{y=1/x}^{2/x} dx = \int_{x=2}^{\infty} \frac{dx}{2x},\end{aligned}$$
vilket är en divergent integral. Därmed räknas hela dubbelintegralen över D som divergent (oavsett om den negativa delen är konvergent eller divergent, så den saken behöver inte undersökas).

Svar: Divergent.

6. (a) Definitionen är $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b)}{t}$.

   (b) Formeln är $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{v}$. Enligt definitionen av vanlig envariabelderivata kan gränsvärdet i (a) skrivas som $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = g'(0)$, där $g(t) = f(a + tv_1, b + tv_2)$. Kedjeregeln ger $g'(t) = f'_x(a + tv_1, b + tv_2)\, v_1 + f'_y(a + tv_1, b + tv_2)\, v_2$. Insättning av $t = 0$ i detta ger $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = g'(0) = f'_x(a,b)\, v_1 + f'_y(a,b)\, v_2 = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{v}$, vilket skulle visas.

   (c) Med $\nabla f(a,b) = \binom{A}{B}$ fås $\frac{A+B}{\sqrt{2}} = \sqrt{18}$ och $\frac{-2A+B}{\sqrt{5}} = -\sqrt{45}$, alltså $A = 7$ och $B = -1$.

   Svar: Riktningsderivatan är som störst i gradientens riktning: $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{50}} \binom{7}{-1}$. Gradientens belopp $\sqrt{50}$ är riktningsderivatans största värde.