Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA69
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2016-01-07 kl. 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $f(x, y)$ som uppfyller differentialekvationen

$$x\, f'_x + 2y\, f'_y = x^2 \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

med bivillkoret $f(x, 1) = x^2$. (Använd t.ex. variabelbytet $u = x$, $v = x^2/y$.)

2. Beräkna $\iiint_D xz\, dxdydz$, där

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ x + y \leq 0\right\}.$$

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen

$$f(x, y, z) = 2z - 3x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 2xz.$$

4. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som innehåller punkterna $(3, 2, 2)$ och $(5, 3, 3)$.

5. Låt D vara det obegränsade område i $\mathbf{R}^2$ som beskrivs av olikheterna $x \geq 2$, $y \geq 0$ och $xy \leq 2$. Beräkna värdet hos den generaliserade integralen

$$\iint_D (xy - 1)\, dxdy$$

om den är konvergent, annars visa att den är divergent.

6. Låt $f(x, y)$ vara en $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler.

   (a) Ange det gränsvärde som definierar riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$, där $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en enhetsvektor och (a, b) är en inre punkt i f:s definitionsmängd.

   (b) Härled formeln som uttrycker $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$ i termer av $\nabla f(a, b)$.

   (c) Om $f'_{(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})}(a, b) = \sqrt{18}$ och $f'_{(-2/\sqrt{5},\, 1/\sqrt{5})}(a, b) = -\sqrt{45}$, för vilken enhetsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är $f'_{\mathbf{v}}(a, b)$ som störst, och vad är detta största värde?