Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-08-18

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = e^y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = xe^y z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = xe^y$, d.v.s. $z'_v = -u$. Integration ger $z(u,v) = -uv + g(u)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel, alltså $z(x,y) = -xye^y + g(xe^y)$. Bivillkoret ger sedan $x^2 = z(x,1) = -ex + g(ex)$, så $g(t) = t + (t/e)^2$. Alltså är $z(x,y) = -xye^y + xe^y + (xe^y/e)^2 = x^2e^{2y-2} - (y-1)xe^y$.

   Svar: $z(x,y) = x^2e^{2y-2} - (y-1)xe^y$.

2. Det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x - 2y, \end{cases} \quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad dudv = \big|-3\big|\, dxdy = 3\, dxdy,$$

   ger nytt område $E:\ -1 \le u \le v \le 2$. Med upprepad integration fås

$$\begin{aligned} \iint_D y\, dxdy &= \iint_E \frac{u-v}{3}\frac{dudv}{3} = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\left(\int_u^2 (u-v)\, dv\right) du \\ &= \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\left[-\frac{(u-v)^2}{2}\right]_{v=u}^{v=2} du = -\frac{1}{18}\int_{-1}^{2}(u-2)^2\, du \\ &= -\frac{1}{18}\left[\frac{(u-2)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Svar: $-1/2$.

   Alternativ: Integrera direkt i xy-planet; området är en triangel med hörn $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(2,0)$.

3. Man kan notera direkt att svaret måste bli negativt. Vid byte till rymdpolära koordinater fås ett nytt område E som ges av $0 \le r \le 1$, $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$ och $0 \le \theta \le \pi$, alltså

$$\begin{aligned} \iiint_D x\, dxdydz &= \iiint_E r\cos\varphi\sin\theta \cdot r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^\pi \sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-2) = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

   Svar: $-\pi/4$.

   Alternativ: För att få lite bekvämare räkningar i rymdpolära koordinater kan man först sätta $(x,y,z) = (-w,u,v)$, vilket ger en integral över området $F = \{u^2+v^2+w^2 \le 1,\ w \ge 0\}$ istället:

$$\iiint_D x\, dxdydz = \iiint_F (-w)\, dudvdw = -\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right).$$

4. Stationära punkter för f bestäms av att $\nabla f = \mathbf{0}$, där

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2+6x-6y-6z, 8y-6x+8z, 12z-6x+8y+4).$$

Eftersom $\nabla f(0,0,0) = (0,0,4)$ så är punkten $(0,0,0)$ inte en stationär punkt, och därmed inte heller en lokal extrempunkt för f.

Däremot är $\nabla f(0,1,-1) = (0,0,0)$, så punkten $(0,1,-1)$ är stationär och undersöks vidare. I denna punkt blir andraderivatorna $f''_{xx} = 6x+6 = 6$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{xz} = -6$, $f''_{yy} = 8$, $f''_{yz} = 8$ och $f''_{zz} = 12$, så vi får den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= 6h^2 + 8k^2 + 12l^2 - 12hk - 12hl + 16kl \\ &= 6(h-k-l)^2 + 2(k+l)^2 + 4l^2, \end{aligned}$$

som är positivt definit eftersom $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h-k-l = 0$, $k+l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Alltså är $(0,1,-1)$ en lokal minimipunkt för f.

Svar: $(0,0,0)$ är inte en lokal extrempunkt för f, men $(0,1,-1)$ är en lokal minimipunkt för f.

5. Sätt $F(x,y,z) = x^4 + 32y^3z$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 48$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är planet $x + 3y + z = C$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,3,1)$, $F(a,b,c) = 48$ och $a + 3b + c = C$, d.v.s. precis då

$$(4a^3, 96b^2c, 32b^3) \parallel (1,3,1), \quad a^4 + 32b^3c = 48 \quad \text{och} \quad a + 3b + c = C.$$

Det första villkoret ger ekvationerna $a^3 = 8b^3$ (d.v.s. $a = 2b$, ty $a, b \in \mathbf{R}$) och $b^2c = b^3$, av vilka den senare ger $b = 0$ eller $b = c$. Fallet $b = 0$ ger $a = 0$, men $F(0,0,c) = 0 \neq 48$. Återstår fallet $b = c$. Insättning i $F = 48$ ger $48 = F(2b,b,b) = 48b^4$, d.v.s. $b = \pm 1$ (ty $b \in \mathbf{R}$), och därmed tangeringspunkterna $(2,1,1)$ och $(-2,-1,-1)$, med tillhörande $C = 6$ respektive $C = -6$.

Svar: $C = \pm 6$.

6. (a) Med planpolära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho} \\ &= \rho\Big(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi + \rho\sin^3\varphi\Big), \end{aligned}$$

så $|f(x,y) - 0| \le \rho(1+1+\rho) \to 0$ när $\rho \to 0$ och φ varierar fritt, d.v.s. $f(x,y) \to 0$ när $(x,y) \to (0,0)$. Sätt därför $f(0,0) = 0$ för att få kontinuitet i origo.

Svar: $f(0,0) = 0$.

(b)

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2/|h| - 0}{h} = \frac{h}{|h|} = \begin{cases} 1, & h > 0, \\ -1, & h < 0, \end{cases}$$

så gränsvärdet när $h \to 0$, d.v.s. $f'_x(0,0)$, existerar ej. Vidare,

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^3/|k| - 0}{k} = \frac{k^2}{|k|} = |k| \to 0 \quad \text{när } k \to 0,$$

så $f'_y(0,0) = 0$.

Svar: $f'_x(0,0)$ existerar ej, men $f'_y(0,0)$ existerar ($= 0$).

(c) Låt $\boldsymbol{v} = (a,b)$ med $a^2 + b^2 = 1$. Då blir

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \frac{\dfrac{(ta)^2 + ta\cdot tb + (tb)^3}{|t|} - 0}{t} = (a^2+ab)\frac{t}{|t|} + b^3|t|$$

som har gränsvärde när $t \to 0$ precis då $a^2 + ab = 0$, d.v.s. precis då $a = 0$ eller $a + b = 0$; gränsvärdet är då definitionsmässigt riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$. Motsvarande vektorer $\boldsymbol{v}$ med längd 1 är $\pm(0,1)$ respektive $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Svar: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ existerar när $\boldsymbol{v} = (0,1)$, $(0,-1)$, $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ eller $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.