Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2016-10-22

1. Stationära punkter ges av $\nabla f = (4x^3 + 4x, 3y^2 + 6z, 2z + 6y) = (0, 0, 0)$, dvs. $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eller $(x, y, z) = (0, 6, -18)$. Ur andraderivatorna fås de kvadratiska formerna

$$Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = 4h^2 + 2l^2 + 12kl = 4h^2 + 2(l + 3k)^2 - 18k^2$$

och

$$Q_{(0,6,-18)}(h, k, l) = 4h^2 + 36k^2 + 2l^2 + 12kl = 4h^2 + 2(l + 3k)^2 + 18k^2.$$

Man visar med standardresonemang att den första är **indefinit** (t.ex. är $Q_{(0,0,0)}(1, 0, 0) = 4 + 0 - 0 > 0$ och $Q_{(0,0,0)}(0, 1, -3) = 0 + 0 - 18 < 0$) och den andra är **positivt definit** (det är uppenbart att $Q_{(0,6,-18)} \geq 0$ överallt, och *enda* sättet att få $Q_{(0,6,-18)}(h, k, l) = 0$ är att ta $h = 0$, $l + 3k = 0$ och $k = 0$, dvs. $(h, k, l) = (0, 0, 0)$). Av detta följer (enligt sats) att $(0, 0, 0)$ inte är någon lokal extrempunkt, medan $(0, 6, -18)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: f har lokalt minimum i $(0, 6, -18)$.

2. (a) Använd kedjeregeln.

Svar: $z'_x(x, y) = g'(x^2 + e^y) \cdot 2x$ och $z'_y(x, y) = g'(x^2 + e^y) \cdot e^y$.

(Observera att g är en funktion av *en* variabel, så dess derivata ska betecknas med g', precis som i envariabelanalyskursen. Det är *inte* korrekt att skriva partiella derivator g'_x och g'_y här. De partiella derivatorna står bara på $z(x, y)$, som ju är en funktion av *två* variabler; $z(x, y)$ är sammansättningen av envariabelfunktionen $g(t)$ och flervariabelfunktionen $t = h(x, y) = x^2 + e^y$.)

(b) Med det föreslagna variabelbytet $u = x$, $v = x^2 + e^y$ fås $z'_x = z'_u + 2x\, z'_v$ och $z'_y = e^y\, z'_v$, vilket insatt i PDE:n ger $e^y(z'_u + 2x\, z'_v) - 2x(e^y\, z'_v) = e^{2y}$, alltså $z'_u = e^y = v - u^2$. Integration med avseende på u ger $z(u, v) = uv - \frac{1}{3}u^3 + g(v)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel, alltså $z(x, y) = x(x^2 + e^y) - \frac{1}{3}x^3 + g(x^2 + e^y) = \frac{2}{3}x^3 + xe^y + g(x^2 + e^y)$. Bivillkoret ger till sist $z(0, y) = g(e^y) = y$, alltså $g(t) = \ln(t)$, för $t > 0$. (Att funktionen $g(t)$ bara blir bestämd för $t > 0$ har ingen betydelse för det slutliga svaret, eftersom enbart positiva värden $t = e^y + x^2 > 0$ stoppas in i $g(t)$ där.)

Svar: $z(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + xe^y + \ln(e^y + x^2)$.

Anmärkning: Notera att liksom för linjära *ordinära* differentialekvationer (som ni har sett i envariabelanalysen) så har lösningen strukturen

”partikulärlösning plus homogenlösning”: $z_p(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + xe^y$ ger högerledet e^y vid insättning i PDE:n, medan $z_h(x,y) = g(x^2+e^y)$ löser den motsvarande homogena ekvationen $e^y\, z'_x(x,y) - 2x\, z'_y(x,y) = 0$ (alltså med noll i högerledet).

Om man vill kontrollera att det verkligen är så (genom insättning) så behöver man resultatet från (a)-uppgiften. Prova det, så märker du varför det är viktigt att det verkligen står *samma* uttryck $g'(x^2+e^y)$ på båda ställena, och inte g'_x resp. g'_y. Annars kommer ju inte de två termerna att ta ut varandra!

3. Man kan t.ex. göra det linjära variabelbytet $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = u\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + v\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, dvs. $x = u + 4v$, $y = 2u - v$. Detta ger en ny triangel E i uv-planet, med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Determinanten $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -9$ ger $dxdy = |-9|\, dudv$, och alltså

$$\iint_D \frac{dxdy}{81 + (2x-y)^2} = \iint_E \frac{9\, dudv}{81 + (9v)^2} = \frac{1}{9}\int_{v=0}^{1}\left(\int_{u=0}^{1-v} \frac{du}{1+v^2}\right) dv$$
$$= \frac{1}{9}\int_0^1 \frac{1-v}{1+v^2}\, dv = \frac{1}{9}\left[\arctan v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2)\right]_0^1 = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right).$$

Svar: Se ovan.

(Notera att svaret måste bli positivt eftersom vi integrerar den överallt positiva funktionen $f(x,y) = 1/(81 + (2x-y)^2)$, och man kan se att det blev positivt eftersom $\pi = 3{,}14\ldots > 3$ och $\ln 2 = 0{,}69\ldots < \ln e = 1$, så att $\pi/4 > 3/4 > 1/2 > (\ln 2)/2$.)

4. Som bekant är gradienten $\nabla f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 3x^2 - 6xy^5 \\ -15x^2y^4 + 1 \end{smallmatrix}\right)$ vinkelrät mot nivåkurvan genom punkten (x,y). I en punkt $(x,y) = (a,1)$ på linjen $y = 1$ måste därmed gradienten vara riktad i y-led för att nivåkurvan ska tangera linjen, alltså

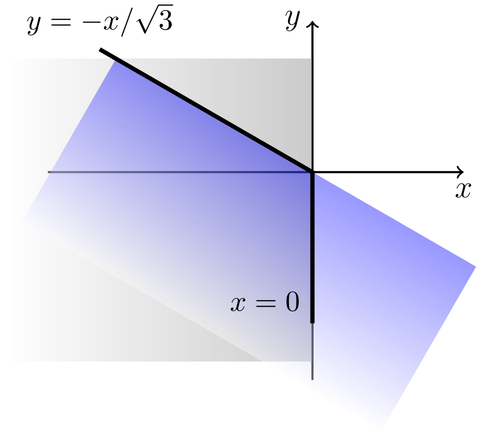
$$\nabla f(a,1) = \begin{pmatrix} 3a^2 - 6a \\ -15a^2 + 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket är fallet om och endast om $3a^2 - 6a = 0$. Detta ger $a = 0$ eller $a = 2$, så nivåkurvorna genom $(0,1)$ och $(2,1)$ tangerar linjen. Insättning av dessa punkter i formeln för $f(x,y)$ ger $f(0,1) = 1$ och $f(2,1) = -3$.

Svar: Nivåkurvorna $f(x,y) = 1$ och $f(x,y) = -3$.

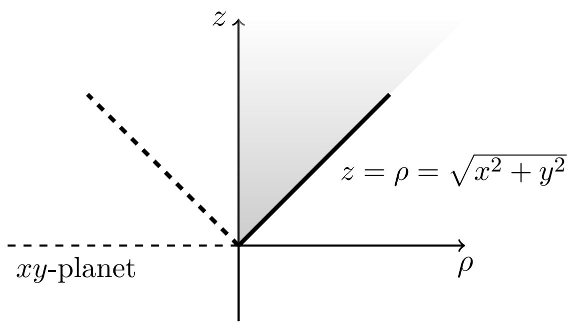
(Om man ska vara noggrann bör man även påpeka att $\nabla f(0,1)$ och $\nabla f(2,1)$ inte är nollvektorn, eftersom $-15a^2 + 1 \neq 0$ då $a = 0$ eller $a = 2$. Detta villkor garanterar ju, via implicita funktionssatsen, att nivåmängden verkligen är en *kurva* i närheten av respektive punkt.)

5. Villkoren $x \leq 0$ och $x + \sqrt{3}\,y \leq 0$ representerar en sektor i rummet som avgränsas av planen $x = 0$ och $x + \sqrt{3}\,y = 0$. Vi kan illustrera detta i en figur sedd uppifrån (där ”uppåt” betyder positiv z-led):



Det grå området indikerar $x \leq 0$, det blå området indikerar $x + \sqrt{3}\,y \leq 0$ (alltså $y \leq -x/\sqrt{3}$), och deras skärning ger sektorn nere till vänster mellan de tjocka svarta strecken (som bildar vinklarna $5\pi/6$ respektive $3\pi/2$ med den positiva x-axeln).

Olikheten $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ är området ovanför konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, vilket enklast illustreras i en figur sedd från sidan. Den verkliga mängden i tre dimensioner fås genom att rotera figurens grå område runt z-axeln. Vinkeln mellan positiva z-axeln och det tjocka strecket är $\pi/4$.



Olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, slutligen, definierar såklart ett klot med centrum i origo och radie 2.

Vid övergång till rymdpolära koordinater fås därmed ett nytt område E

som ges av $0 \le r \le 2$, $5\pi/6 \le \varphi \le 3\pi/2$ och $0 \le \theta \le \pi/4$, alltså

$$\begin{aligned}
&\iiint_D x^2\,dxdydz = \iiint_E (r\cos\varphi\sin\theta)^2 \cdot r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4} \sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi\right) \\
&= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right) \\
&= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{5\pi/6}^{3\pi/2} \\
&= \frac{32}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{(8-5\sqrt{2})(8\pi+3\sqrt{3})}{45}$.

(Svaret måste uppenbart bli positivt eftersom vi integrerar $f(x,y,z) = x^2 \ge 0$, och man kan se att det blev positivt eftersom $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots < 1{,}6 = 8/5$, eller, om man föredrar det, $8 = \sqrt{64} > \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.)

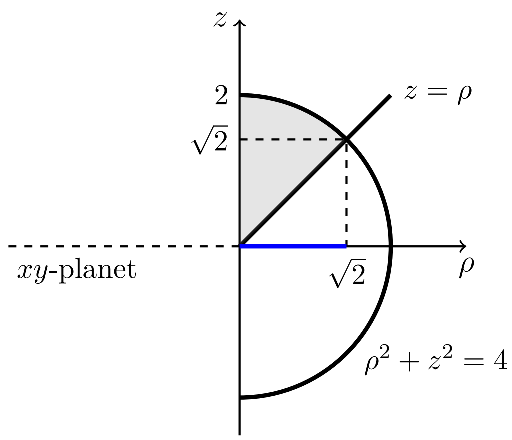
En alternativ lösning är att använda stavar i z-led, med konen som ”botten” och sfären som ”lock”, alltså

$$\iiint_D x^2\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} x^2\,dz\right)dxdy,$$

där projektionen av D på xy-planet är

$$\begin{aligned}
\widetilde{D} &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \le 0,\ x + \sqrt{3}\,y \le 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-(x^2+y^2)}\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \le 0,\ x + \sqrt{3}\,y \le 0,\ x^2+y^2 \le 2\right\}.
\end{aligned}$$

Det blir alltså en cirkelsektor i xy-planet, med radien $\sqrt{2}$. Observera att detta *inte* är lika med *klotets* radie 2; se figuren, där cirkelradien ifråga representeras av det blå strecket:



Dubbelintegralen över $\widetilde{D}$ beräknas enklast i planpolära koordinater, med nytt område $F = \{(\rho, \varphi) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ 5\pi/6 \leq \varphi \leq 3\pi/2\}$:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\widetilde{D}} x^2 \left(\sqrt{4 - (x^2 + y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy \\
&= \iint_F (\rho \cos\varphi)^2 \left(\sqrt{4 - \rho^2} - \rho\right) \rho \, d\rho d\varphi \\
&= \left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi\right) \left(\int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{4 - \rho^2} \, d\rho - \int_{\rho=0}^{\sqrt{2}} \rho^4 d\rho\right).
\end{aligned}$$

Med $t = 4 - \rho^2$ (och $dt = -2\rho \, d\rho$) får man att den första ρ-integralen är

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sqrt{4 - \rho^2} \, (-2\rho) d\rho &= -\frac{1}{2} \int_4^2 (4 - t) \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{4\, t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{5/2}}{5/2} \right]_2^4 \\
&= \tfrac{4}{3}(4^{3/2} - 2^{3/2}) - \tfrac{1}{5}(4^{5/2} - 2^{5/2}) = \frac{64 - 28\sqrt{2}}{15},
\end{aligned}$$

från vilket man subtraherar $[\frac{1}{5}\rho^5]_0^{\sqrt{2}} = \frac{12}{15}\sqrt{2}$, och multiplicerar med φ-integralen som blir $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ precis som i den första lösningen.

Ännu en alternativ lösning är att använda skivor (tvärsnitt för fixt z). Då måste man dela upp kroppen i två delar, en undre del med $0 \leq z \leq \sqrt{2}$, och en övre del med $\sqrt{2} \leq z \leq 2$ (se figuren ovan), men å andra sidan blir primitivuträkningarna ganska bekväma. För varje fixt z är tvärsnittet D_z en cirkelsektor med samma vinklar $5\pi/6 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ som ovan, men med en z-beroende radie; i den undre delen har vi $0 \leq \rho \leq z$ (radien ges av konen $z = \rho$) och i den övre delen är $0 \leq \rho \leq \sqrt{4 - z^2}$ (radien ges av sfären $\rho^2 + z^2 = 4$). Detta ger (om

E_z betecknar den just beskrivna z-beroende rektangeln i $\rho\varphi$-planet som motsvarar cirkelsektorn D_z i xy-planet) att

$$\begin{aligned}
\iiint_D x^2\,dxdydz &= \int_{z=0}^{2}\left(\iint_{D_z} x^2\,dxdy\right)dz \\
&= \int_{z=0}^{2}\left(\iint_{E_z} (\rho\cos\varphi)^2\,\rho\,d\rho d\varphi\right)dz \\
&= \int_{z=0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^z \rho^3 d\rho\right)dz \\
&\quad+ \int_{z=\sqrt{2}}^{2}\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 d\rho\right)dz \\
&= \left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_{z=0}^{\sqrt{2}}\frac{z^4}{4}\,dz + \int_{z=\sqrt{2}}^{2}\frac{(4-z^2)^2}{4}\,dz\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} + \left[16z-\frac{8z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right]_{\sqrt{2}}^{2}\right),
\end{aligned}$$

vilket (såklart) ger samma svar ännu en gång.

6. Sätt $F(x,y) = x^y - x - y$. Då är $F'_y(x,y) = x^y \ln x - 1$. Eftersom F är av klass $\mathcal{C}^1$, $F(1,3) = -3$ och $F'_y(1,3) = -1 \neq 0$ så är villkoren för implicita funktionssatsen uppfyllda, och den säger då att ekvationen $F(x,y) = -3$ implicit definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ nära $(x,y) = (1,3)$, vilket skulle visas. Notera att $y(1) = 3$ per definition.

   Implicit derivering av sambandet $x^{y(x)} - x - y(x) = -3$ ger

$$x^{y(x)}\Big(y'(x)\ln x + y(x)/x\Big) - 1 - y'(x) = 0.$$

   (När man deriverar $x^{y(x)}$ får man tänka på att det betyder $e^{y(x)\ln x}$.) Om vi löser ut $y'(x)$ får vi

$$y'(x) = \frac{1 - y(x)x^{y(x)-1}}{x^{y(x)}\ln x - 1}.$$

   Här är uttrycket i högerledet av klass $\mathcal{C}^1$ (nära $x = 1$), eftersom vi vet att $y(x)$ är det, och eftersom vi inte dividerar med noll. Alltså är även vänsterledet $y'(x)$ av klass $\mathcal{C}^1$, vilket betyder att funktionen $y(x)$ själv är av klass $\mathcal{C}^2$.

   Vi övergår nu till att skriva y och y' istället för $y(x)$ och $y'(x)$, för enkelhets skull. Derivering av $y' \cdot (x^y \ln x - 1) = 1 - yx^{y-1}$ ger

$$
\begin{aligned}
y'' \cdot (x^y \ln x - 1) + y' \cdot \Big(x^y (y' \ln x + y/x) \ln x + x^y/x \Big) \\
= -y' \cdot x^{y-1} - y \cdot x^{y-1}(y' \ln x + (y-1)/x).
\end{aligned}
$$

Om vi här löser ut $y''(x)$ får vi igen ett uttryck av klass $\mathcal{C}^1$, vilket betyder att $y(x)$ själv är av klass $\mathcal{C}^3$. (Man kan fortsätta på liknande sätt och visa att $y(x)$ rentav är av klass $\mathcal{C}^\infty$.)

Insättning av $x = 1$ och $y(1) = 3$ i formeln för $y'(x)$ ger $y'(1) = (-2)/(-1) = 2$, och insättning av detta i formeln för $y''(x)$ ger $-y''(1) + 2 \cdot 1 = -2 - 3 \cdot 2$, alltså $y''(1) = 10$. Taylors formel ger nu utvecklingen av ordning 2 kring $x = 1$:

$$
\begin{aligned}
y(1+h) &= y(1) + y'(1)h + \frac{y''(1)h^2}{2!} + \mathcal{O}(h^3) \\
&= 3 + 2h + 5h^2 + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}
$$

Svar: Se ovan.

En arbetsbesparande variant är att notera att ekvationen $x^y = x + y - 3$ är ekvivalent med $y \ln x = \ln(x + y - 3)$ (åtminstone för $x > 0$ och $x + y - 3 > 0$, och det kan vi ju anta gäller eftersom vi bara är intresserade av vad som händer nära $(x, y) = (1, 3)$). Man kan alltså skriva ekvationen som $G(x, y) = 0$, där $G(x, y) = y \ln x - \ln(x + y - 3)$. Sedan beräknar man $G'_y(x, y) = \ln x - (x + y - 3)^{-1}$, kontrollerar att $G'_y(1, 3) \neq 0$, deriverar implicit, osv., precis som ovan, fast med mycket enklare uträkningar!