Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-01-03

1. Stationära punkter ges av

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 + 2(x+y) - \dfrac{12}{1+x^2} \\ -4 + 2(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $x + y = 2$ och $12/(1+x^2) = 6$. Ur detta fås att $(x,y) = (1,1)$ eller $(x,y) = (-1,3)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 2 + 24x(1+x^2)^{-2}$, $f''_{xy} = 2$ och $f''_{yy} = 2$, vilket på vanligt vis ger de kvadratiska formerna

$$Q_{(1,1)}(h,k) = 8h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 + 6h^2$$

och

$$Q_{(-1,3)}(h,k) = -4h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 - 6h^2.$$

Standardresonemang visar att den första är **positivt definit** och den andra är **indefinit**, så f har (strängt) lokalt minimum i $(1,1)$, men inget lokalt extremvärde i $(-1,3)$.

Svar: $(1,1)$ är en lokal minimipunkt för f. (Lokala maximipunkter saknas.)

2. Variabelbytet $x = 2\sqrt{3}\,u$, $y = 2v$ ger ett nytt område E som definieras av $0 \le v \le -\sqrt{3}\,u$ och $u^2 + v^2 \le 1$. Planpolära koordinater i uv-planet ger därefter

$$\iint_D y^2\,dxdy = \iint_E 4v^2 \cdot 4\sqrt{3}\,dudv = 16\sqrt{3} \int_{\varphi=2\pi/3}^{\pi} \int_{\rho=0}^{1} (\rho\sin\varphi)^2 \rho\,d\rho d\varphi$$
$$= 16\sqrt{3} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2}.$$

Svaret ska förstås bli positivt, eftersom det är y^2 som integreras, och det ser man lätt att det är, eftersom $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \pi > 1 \cdot 3 > \frac{3}{2}$.

Alternativ metod: $\displaystyle\iint_D y^2\,dxdy = \int_{y=0}^{\sqrt{3}} \left(\int_{x=-\sqrt{12-3y^2}}^{-y} y^2 dx \right) dy = \cdots$

Svar: $2\pi/\sqrt{3} - 3/2$.

3. Sätt $f(x,y) = x^2 - 4x + 5y^2 - 10y$, så att kurvans ekvation blir $f(x,y) = 0$. Kalla tangeringspunkten för (a,b); eftersom den ska ligga på kurvan måste $f(a,b) = 0$ gälla. Om kurvans tangentlinje i (a,b) ska gå genom $(5,-2)$ måste vektorn från (a,b) till $(5,-2)$ vara vinkelrät mot gradienten $\nabla f(a,b)$, dvs.

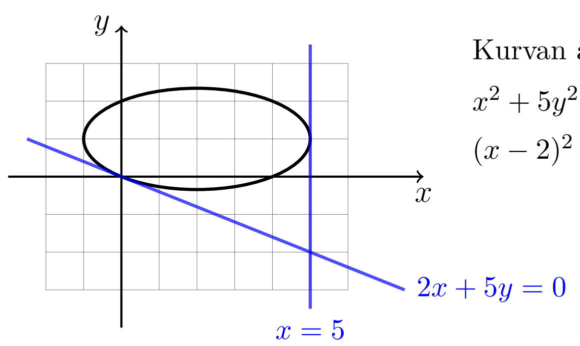
$$\begin{pmatrix} a-5 \\ b-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a-4 \\ 10b-10 \end{pmatrix} = 0.$$

Punkten (a,b) bestäms alltså av ekvationssystemet

$$a^2 - 4a + 5b^2 - 10b = 0, \qquad (a-5)(2a-4) + (b+2)(10b-10) = 0.$$

Ta den andra ekvationen minus två gånger den första; detta ger $6a - 30b = 0$, alltså $a = 5b$. Insättning av detta i den första ekvationen ger $30b^2 - 30b = 0$, alltså $b = 0$ eller $b = 1$. Slutsats: $(a,b) = (0,0)$ eller $(5,1)$. Gradienterna $\nabla f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ -10 \end{smallmatrix}\right) = -2\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ och $\nabla f(5,1) = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 6\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ger normalvektorn för tangentlinjen i respektive punkt.

Svar: De sökta linjerna är $2x + 5y = 0$ och $x = 5$.



Kurvan är en ellips:

$$x^2 + 5y^2 = 4x + 10y \iff$$
$$(x-2)^2 + 5(y-1)^2 = 9$$

4. (a) T.ex. är $F(1,0,0)$ och $F(0,1,0)$ båda lika med $(1,1,1)$.

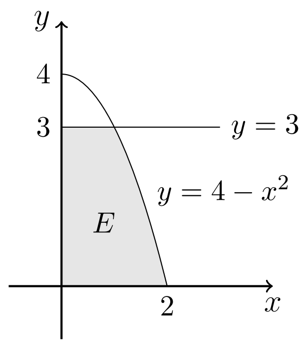
   (b) Avbildningen F ges av polynom och är därför uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$, och dess funktionaldeterminant i punkten $(-1,0,1)$ är

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

   Förutsättningarna för inversa funktionssatsen är alltså uppfyllda, och slutsatsen är att det finns en omgivning av $(-1,0,1)$ sådan att F:s restriktion dit är inverterbar, med invers av klass $\mathcal{C}^1$, vilket var vad som skulle visas.

(c) Den lokala volymsskalan för F i punkten $(-1, 0, 1)$ är beloppet av ovanstående funktionaldeterminant, alltså 12, och inversens lokala volymsskala i den motsvarande punkten $F(-1, 0, 1) = (0, 2, 0)$ är därför $1/12$, enligt sambandet $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = 1/\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$. **Svar:** $1/12$.

5. Det finns många framkomliga sätt att beräkna volymen av denna kropp D. Man kan t.ex. använda stavar i z-led. Om man skriver olikheterna som $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$ och $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y$ så ser man direkt gränserna för z, och även att kroppens projektion på xy-planet, kalla den E, ges av $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$ och $0 \leq 4 - x^2 - y$:



Det är bekvämast att sätta x-integralen innerst när man integrerar över E, så att man kan ta hela området i ett svep och slipper dela upp det i två delar:

$$\begin{aligned}
\text{Volym}(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=0}^{4-x^2-y} dz \right) dxdy \\
&= \int_{y=0}^{3} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} (4 - y - x^2)\, dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{3} \left[(4-y)x - \tfrac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{\sqrt{4-y}} dy = \int_{y=0}^{3} \tfrac{2}{3}(4-y)^{3/2} dy \\
&= \left[-\tfrac{2}{3}\tfrac{2}{5}(4-y)^{5/2} \right]_{y=0}^{3} = -\tfrac{4}{15}(1 - 32) = \frac{124}{15}.
\end{aligned}$$

Ett par andra smidiga alternativ är att använda stavar i x-led eller tvärsnitt för fixt y. Om man följer det enklaste spåret i dessa varianter får man i båda fallen

$$\int_{y=0}^{3} \left(\int_{z=0}^{4-y} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{4-y-z}} dx \right) dz \right) dy = \cdots = \frac{124}{15}.$$

Svar: $124/15$.

6. Integralerna av x^4, y^4 och z^4 över klotet K_R är av symmetriskäl lika stora, och med hjälp av rymdpolära koordinater får vi

$$\begin{aligned}\iiint_{K_R} z^4\,dxdydz &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}(r\cos\theta)^4 r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= 2\pi\cdot\tfrac{1}{7}R^7\cdot[-\tfrac{1}{5}\cos^5\theta]_0^\pi = \frac{4\pi R^7}{35}.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned}f(R) &= \iiint_{K_R}(x^4+y^4+z^4-1)\,dxdydz \\ &= 3\iiint_{K_R} z^4\,dxdydz - \mathrm{Volym}(K_R) \\ &= \frac{12\pi R^7}{35} - \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3\left(\frac{3R^4}{35}-\frac{1}{3}\right),\end{aligned}$$

med derivatan

$$f'(R) = \frac{12\pi R^6}{5} - 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{5}(3R^4-5),$$

som är negativ för $0 < R < (5/3)^{1/4}$ och positiv för $R > (5/3)^{1/4}$. Funktionen $f(R)$, $R > 0$, har alltså globalt minimum

$$f\Big((5/3)^{1/4}\Big) = 4\pi\cdot(5/3)^{3/4}\left(\frac{5}{35}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{16\pi\cdot(5/3)^{3/4}}{21}.$$

Och $f(R)\to\infty$ då $R\to\infty$, eftersom R^7-termen dominerar.

Svar: Integralen antar alla värden i intervallet $[-16\pi\cdot(5/3)^{3/4}/21, \infty[$.