Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2017-05-29

1. Stationära punkter ges av

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2+7x+8y-x^2 \\ 8x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dvs. $y=-x$ och $2-x-x^2=0$. Ur detta fås att $(x,y)=(1,-1)$ eller $(x,y)=(-2,2)$. Andraderivatorna är $f''_{xx}=7-2x$, $f''_{xy}=8$ och $f''_{yy}=8$, så den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen kring respektive punkt är

$$Q_{(1,-1)}(h,k) = (7-2)h^2 + 2\cdot 8hk + 8k^2 = 8(k+h)^2 - 3h^2$$

(indefinit, t.ex. är $Q(1,-1)=-3<0$ och $Q(0,1)=8>0$) och

$$Q_{(-2,2)}(h,k) = (7+4)h^2 + 2\cdot 8hk + 8k^2 = 8(k+h)^2 + 3h^2$$

(positivt definit, ty $Q\geq 0$ alltid, och $Q=0$ enbart om $k+h=0$ och $h=0$, dvs. $(h,k)=(0,0)$).

Svar: f har sadelpunkt i $(1,-1)$ och (strängt) lokalt minimum i $(-2,2)$. (Lokala maximipunkter saknas.)

2. Man kan notera redan innan man börjar att svaret måste bli negativt, eftersom integranden $y-x$ är negativ i D; olikheterna $x\geq 1$ och $y\leq 0$ medför ju att $y-x\leq -1$.

Variabelbytet $u=x-1$, $v=2y$ ger ett nytt område E som definieras av $u\geq 0$, $v\leq 0$ och och $u^2+v^2\leq 2^2$. Planpolära koordinater i uv-planet ger därefter

$$\begin{aligned}
\iint_D (y-x)\,dxdy &= \iint_E (\tfrac{1}{2}v-u-1)\,\frac{dudv}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\varphi=-\pi/2}^{0}\left(\int_{\rho=0}^{2}(\tfrac{1}{2}\rho\sin\varphi-\rho\cos\varphi-1)\rho\,d\rho\right)d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\varphi=-\pi/2}^{0}(\tfrac{4}{3}\sin\varphi-\tfrac{8}{3}\cos\varphi-2)d\varphi \\
&= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{4}{3}-\tfrac{8}{3}-2\cdot\tfrac{\pi}{2}).
\end{aligned}$$

Svar: $-2-\frac{\pi}{2}$.

3. Ekvationen är $f(x,y) = 5$ där $f(x,y) = x^5 e^{y-2} + xy^2$, en funktion som uppenbart är av klass $\mathcal{C}^1$. Vidare har vi $f(1,2) = 5$ och

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x^4 e^{y-2} + y^2 \\ x^5 e^{y-2} + 2xy \end{pmatrix} \implies \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 \cdot 1 + 2^2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

och speciellt $f'_x(1,2) = 9 \neq 0$. Förutsättningarna för implicita funktionssatsen är därmed uppfyllda, och den visar att ekvationens lösning har formen $x = g(y)$ nära $(1,2)$, för någon $\mathcal{C}^1$-funktion g.

Implicit derivering av sambandet $f(g(y), y) = 5$ ger

$$f'_x(g(y), y) \cdot g'(y) + f'_y(g(y), y) = 0,$$

varefter insättning av $y = 2$ och $g(2) = 1$ ger $9 \cdot g'(2) + 5 = 0$, alltså $g'(2) = -5/9$.

Tangentlinjen, slutligen, är $x - 1 = g'(2)\,(y - 2)$, alltså $9x + 5y = 19$. (Alternativt sätt att tänka: grafen $x = g(y)$ utgör en del av nivåkurvan $f = 5$, så tangentlinjens normalvektor ges av nivåkurvans normalvektor $\nabla f(1,2) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$.)

Svar: $g'(2) = -5/9$, tangentlinjen är $9x + 5y = 19$.

4. Låt $f(x,y,z) = x^2 + xy - 2yz + 2z^2$, så att ytans ekvation är $f(x,y,z) = 6$. De sökta tangeringspunkterna (a,b,c) ska såklart ligga på ytan, och om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ska vara tangentvektorer så måste ytans normalvektor $\nabla f(a,b,c)$ vara vinkelrät mot dem, vilket ger villkoren

$$f(a,b,c) = 6, \quad \nabla f(a,b,c) \bullet \mathbf{u} = 0, \quad \nabla f(a,b,c) \bullet \mathbf{v} = 0.$$

De två sistnämnda villkoren blir i utskriven form

$$\begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2c \\ -2b + 4c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a - 2b + 2c = 0, \qquad \begin{pmatrix} 2a + b \\ a - 2c \\ -2b + 4c \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a + 4c = 0,$$

ett linjärt system med parameterlösning $(a,b,c) = (-2t, t, 2t)$, $t \in \mathbf{R}$. Insättning av detta i $f(a,b,c) = 6$ ger

$$(-2t)^2 + (-2t)t - 2t(2t) + 2(2t)^2 = 6,$$

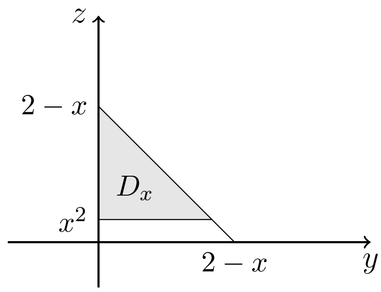
dvs. $6t^2 = 6$, dvs. $t = \pm 1$. Detta ger att de sökta punkterna är $(a,b,c) = \pm(-2, 1, 2)$. Tangentplanets normalvektor är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

så tangentplanen är $x + 2y - 2z = D$, där D fås genom att sätta in punkterna ifråga. (Normalen kan förstås även beräknas som $\nabla f(a, b, c)$.)

Svar: Punkterna är $(-2, 1, 2)$ och $(2, -1, -2)$, och tangentplanen där är $x + 2y - 2z = -4$ resp. $x + 2y - 2z = 4$.

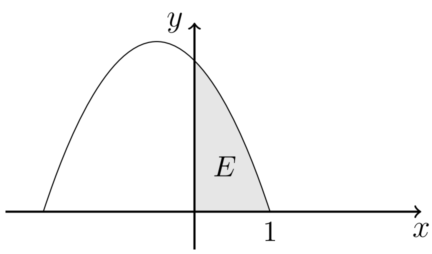
5. Det finns många sätt att beräkna D:s volym. Det enklaste är antagligen att använda tvärsnitt D_x för fixt x. Det är uppenbart att $x \in [0, 2]$ till att börja med. Med x fixerat så blir villkoren för y och z att $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y + z \leq 2 - x$ (vilket ger en halv kvadrat i yz-planet med sidlängd $2 - x$) samt $z \geq x^2$ (vilket skär bort nederdelen och ger en lite mindre triangel, med sidlängd $(2 - x) - x^2$):



För att det verkligen ska bli en triangel (och inte tomma mängden) måste vi ha $x^2 \leq 2 - x \iff (x + 2)(x - 1) \leq 0$, så vi kan inte ta med hela intervallet $x \in [0, 2]$, utan bara $x \in [0, 1]$. Detta ger

$$\begin{aligned} \text{Volym}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_{x=0}^{1} \text{Area}(D_x)\, dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{2}\Big((2 - x) - x^2\Big)^2 dx = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

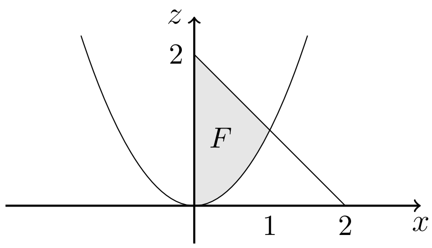
Ett alternativ är att använda stavar i z-led; då får man $x^2 \leq z \leq 2 - x - y$, över det område E i xy-planet som definieras av $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 \leq 2 - x - y$ (dvs. $y \leq 2 - x - x^2 = -(x - 1)(x + 2)$):



På detta sätt fås

$$\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=x^2}^{2-x-y} dz \right) dxdy$$
$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{2-x-x^2} \left(2 - x - y - x^2\right) dy \right) dx = \frac{17}{20}.$$

Ännu ett lättframkomligt sätt är stavar i y-led, $0 \leq y \leq 2 - x - z$, över det område F i xz-planet som ges av $x \geq 0$, $z \geq x^2$ och $0 \leq 2 - x - z$:



Detta leder till

$$\iiint_D dxdydz = \iint_F \left(\int_{y=0}^{2-x-z} dy \right) dxdz$$
$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{z=x^2}^{2-x} \left(2 - x - z\right) dz \right) dx = \frac{17}{20}.$$

Svar: Volymen är 17/20.

6. Derivering av $z(x, y) = f(xy^2) + y\, g(x)$ med kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
z'_x(x, y) &= f'(xy^2) \cdot y^2 + y\, g'(x), \\
z'_y(x, y) &= f'(xy^2) \cdot 2xy + g(x), \\
z''_{xy}(x, y) &= f''(xy^2) \cdot 2xy \cdot y^2 + f'(xy^2) \cdot 2y + g'(x), \\
z''_{yy}(x, y) &= f''(xy^2) \cdot 2xy \cdot 2xy + f'(xy^2) \cdot 2x.
\end{aligned}$$

Vid insättning av detta i differentialekvationens vänsterled tar alla termerna ut varandra, så det blir noll kvar, vilket skulle visas.

Angående bivillkoren ger insättning av $y = 1$ att

$$\begin{aligned}
0 &= z(x, 1) = f(x) + g(x), \\
3x^2 &= z'_y(x, 1) = f'(x) \cdot 2x + g(x),
\end{aligned}$$

vilket medför att $2x\,f'(x) - f(x) = 3x^2$, alltså

$$f'(x) - \tfrac{1}{2x}\,f(x) = \tfrac{3}{2}x.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $\exp(\int \frac{-1}{2x}\,dx) = x^{-1/2}$ fås $(x^{-1/2} f(x))' = \frac{3}{2}x^{1/2}$, så att $x^{-1/2} f(x) = x^{3/2} + C$. Alltså har vi $f(x) = x^2 + C\sqrt{x}$ (för $x > 0$), och då blir $g(x) = -f(x) = -x^2 - C\sqrt{x}$, vilket ger svaret

$$z(x,y) = f(xy^2) + y\,g(x) = (xy^2)^2 + C\,\sqrt{xy^2} - y\,(x^2 + C\,\sqrt{x}) = x^2(y^4 - y)$$

(eftersom $\sqrt{y^2} = y$ om $y > 0$).

Svar: Se ovan.