Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-08-23

1. Från $f'_x = 6y - 6x^2 = 0$ och $f'_y = 6x - 6y = 0$ fås de stationära punkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (1, 1)$. Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen är

$$Q_{(0,0)}(h, k) = 12hk - 6k^2 = -6(k - h)^2 + 6h^2 \qquad \text{(indefinit)}$$

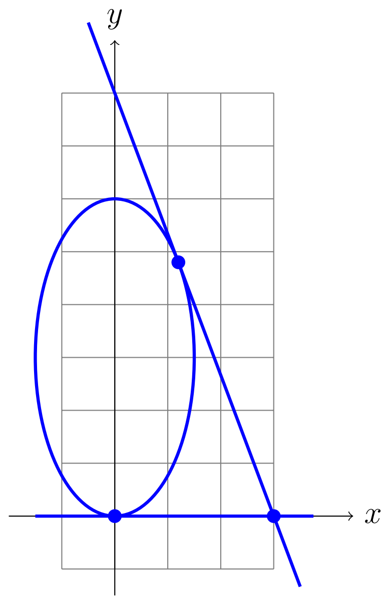
respektive

$$Q_{(1,1)}(h, k) = -12h^2 + 12hk - 6k^2 = -6(k - h)^2 - 6h^2 \qquad \text{(neg. def.)}.$$

Svar: f har lokalt maximum i punkten $(1, 1)$. (Lokalt minimum saknas.)

2. Sätt $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 6y$ och antag att den sökta linjen tangerar kurvan $f(x, y) = 0$ i punkten $(x, y) = (a, b)$. För detta krävs att $f(a, b) = 0$ och att $\nabla f(a, b)$ är vinkelrät mot vektorn från $(3, 0)$ till (a, b):

$$4a^2 + b^2 - 6b = 0, \qquad \begin{pmatrix} 8a \\ 2b - 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - 3 \\ b - 0 \end{pmatrix} = 0.$$



Den andra av dessa ekvationer minus två gånger den första ger $-24a + 6b = 0$, dvs. $b = 4a$. Insättning av detta i den första ekvationen ger $20a^2 - 24a = 0$, dvs. $a = 0$ eller $a = 6/5$. Tangeringspunkten är alltså $(0, 0)$ eller $(\frac{6}{5}, \frac{24}{5})$.
Kurvan $4x^2 + y^2 - 6y = 0 \iff \left(\frac{x}{3/2}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$ är en ellips med centrum i $(0, 3)$ och halvaxlar av längd $\frac{3}{2}$ resp. 3.

Svar: Tangentlinjerna är $y = 0$ och $8x + 3y = 24$.

3. Linjen $y = x$ delar halvcirkelskivan D i två delområden, D_1 nedanför linjen (alltså där $y \le x$ så att $|x - y| = x - y$) och D_2 ovanför (där $|x - y| = -(x - y)$). Polära koordinater ger sedan

$$\begin{aligned}
\iint_D |x - y| \, dxdy &= \iint_{D_1} (x - y) \, dxdy - \iint_{D_2} (x - y) \, dxdy \\
&= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^{2} \rho^2 (\cos\varphi - \sin\varphi) \, d\rho \right) d\varphi \\
&\quad - \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{2} \rho^2 (\cos\varphi - \sin\varphi) \, d\rho \right) d\varphi \\
&= \tfrac{8}{3} [\sin\varphi + \cos\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/4} - \tfrac{8}{3} [\sin\varphi + \cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \tfrac{8}{3} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} - (-1) - 0\right) - \tfrac{8}{3} \left(1 + 0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \tfrac{8}{3} (\sqrt{2} + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Svar: $16\sqrt{2}/3$.

4. Derivering av $z(x,y) = x^5 + f(x^3 - y^4)$ med kedjeregeln ger

$$z'_x(x,y) = 5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4), \qquad z'_y(x,y) = -4y^3 f'(x^3 - y^4).$$

För att få en ekvation som uppfylls oavsett vad f är, måste vi kombinera dessa derivator så att termerna innehållande f' tar ut varandra, såhär:

$$\begin{aligned} 4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y &= 4y^3\Big(5x^4 + 3x^2 f'(x^3 - y^4)\Big) + 3x^2\Big(-4y^3 f'(x^3 - y^4)\Big) \\ &= 20x^4y^3 + (12x^2y^3 - 12x^2y^3)\, f'(x^3 - y^4) \\ &= 20x^4y^3. \end{aligned}$$

Svar: $4y^3 z'_x + 3x^2 z'_y = 20x^4y^3$.

5. Massan är

$$\begin{aligned} \iiint_D x\,dxdydz &= \iint\limits_{\substack{x^2+y\le 1\\ x,y\ge 0}} \left(\int_{z=0}^{(1-x^2-y)^2} x\,dz\right) dxdy \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x^2} x(1-x^2-y)^2 dy\right) dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \Big[-\tfrac{1}{3}x(1-x^2-y)^3\Big]_{y=0}^{1-x^2} dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{3}x(1-x^2)^3 dx = \Big[-\tfrac{1}{24}(1-x^2)^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{24}. \end{aligned}$$

Svar: 1/24.

6. För $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ är

$$f'_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{xz^3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(-x^2+y^2+z^2)z^3}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

och direkt från derivatans definition fås

$$f'_x(0,0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Detta ger

$$f''_{xz}(0,0,0) = \lim_{l\to 0}\frac{f'_x(0,0,l) - f'_x(0,0,0)}{l} = \lim_{l\to 0}\frac{l^5/l^4 - 0}{l} = 1.$$

Liknande uträkningar visar att $f'_z(x,0,0) = 0$ för alla x, vilket medför att $f''_{zx}(0,0,0) = 0$.

Svar: $f''_{xz}(0,0,0) = 1$ och $f''_{zx}(0,0,0) = 0$.