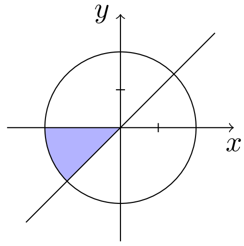
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2018-10-24

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u - 2xf'_v$ och $f'_y = f'_v$, så PDE:n blir i nya variabler $f'_u = 3(v+u^2)$, vilket ger $f = 3uv + u^3 + g(v) = -2x^3 + 3xy + g(y-x^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Villkoret $0 = f(1,y) = -2 + 3y + g(y-1)$ ger sedan $g(t) = 2 - 3(t+1) = -1 - 3t$.

   Svar: $f(x,y) = -2x^3 + 3xy - 1 - 3(y - x^2)$.

2. Byte till planpolära koordinater ger

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x-1)\,dxdy \\
&= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\int_{\rho=0}^{2} (\rho\cos\varphi - 1)\,\rho\,d\rho \right) d\varphi \\
&= \int_{\varphi=\pi}^{5\pi/4} \left(\tfrac{2^3}{3}\cos\varphi - \tfrac{2^2}{2} \right) d\varphi \\
&= \left[\tfrac{8}{3}\sin\varphi - 2\varphi\right]_{\pi}^{5\pi/4} = \tfrac{8}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$



   Svar: $-\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (Man kan även skriva $\iint_D (x-1)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy - \iint_D dxdy = I_1 - I_2$ och räkna ut I_1 som ovan, men istället utnyttja att I_2 är arean av D, en åttondel av en cirkel: $I_2 = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 2^2 = \frac{\pi}{2}$.)

3. **Svar:** (a) $4x + 3y = 10$ (b) $-82/\sqrt{13}$ (c) $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$.

   (a) Skriv kurvan som $f(x,y) = 3x^2 + 2y - \sin(2x-y) = 7$. Då är $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\cos(2x-y) \\ 2 + \cos(2x-y) \end{pmatrix}$ och alltså $\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Detta är en normalvektor till tangentlinjen. vars ekvation därmed blir $4x + 3y = C$, där C bestäms genom att sätta in $(x,y) = (1,2)$.

   (b) Vektorn från punkten $(3,2)$ till punkten $(0,4)$ är $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, så enhetsvektorn i den riktningen är $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Riktningsderivatan ges av formeln $f'_{\mathbf{v}}(3,2) = \nabla f(3,2) \cdot \mathbf{v}$, där $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -4y^3 \end{pmatrix}$.

   (c) Insättning av $x = 0$ i det givna sambandet $y^5 + ye^{3x} - x = 2$ ger $y^5 + y = 2$. Inspektion ger att $y = 1$ är en lösning, och detta är den enda reella lösningen, eftersom vänsterledet är en strängt växande funktion av y. Alltså $f(0) = 1$. Implicit derivering ger $5y^4y' + y'e^{3x} + 3ye^{3x} - 1 = 0$, vilket då $x = 0$ och $y = 1$ blir $5y' + y' + 3 - 1 = 0$, dvs. $y' = -1/3 = f'(0)$.

4. I rymdpolära koordinater fås ett motsvarande område E som ges av $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $0 \le \theta \le \pi/3$. Alltså:

$$\begin{aligned}\iiint_D z^2\,dxdydz &= \iiint_E (r\cos\theta)^2\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= 2\pi\left(\int_{r=0}^{1} r^4\,dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi/3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\right) \\ &= 2\pi\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\left[-\tfrac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/3} = 2\pi\cdot\tfrac{1}{15}\cdot\left(1-\tfrac{1}{8}\right).\end{aligned}$$

Svar: $7\pi/60$.

(Man kan även använda stavar i z-led, $\iint_{\tilde{D}}\left(\int_{z=\sqrt{(x^2+y^2)/3}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\right)dxdy$ där $\tilde{D}$ är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 3/4$, men detta ger jobbigare uträkningar.)

5. Derivatan $f'_x(0,0)$ är lika med nedanstående gränsvärde, om det existerar (ändligt):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3+h^4+0}{h^2+0+0}-0}{h} = \lim_{h\to 0}(1+h) = 1.$$

Alltså är $f'_x(0,0)=1$. För att undersöka $f'_y(0,0)$ betraktar vi gränsvärdet

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0+0+k^2}{0+0+k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}.$$

Detta gränsvärde existerar ej ändligt. (Och det existerar ju för övrigt inte i oegentlig mening heller, eftersom $\frac{1}{k}\to\pm\infty$ då $k\to 0^{\pm}$.)

Svar: $f'_x(0,0)=1$, $f'_y(0,0)$ existerar ej.

6. Från Maclaurinutvecklingen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{2x+y} - 2x - y - 4xy \\ &= 1 + (2x+y) + \tfrac{1}{2!}(2x+y)^2 + O(\rho^3) - 2x - y - 4xy \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}((2x+y)^2 - 8xy) + O(\rho^3) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}(2x-y)^2 + O(\rho^3), \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

ser man att origo är en stationär punkt för f (eftersom förstagradstermer saknas). Den kvadratiska formen $Q(x,y) = (2x-y)^2$ är dock bara positivt **semi**definit, så kan vi inte enbart från Q avgöra om det är en lokal extrempunkt eller inte. Låt oss istället undersöka närmare hur f beter sig i de punkter där $Q(x,y) = 0$, dvs. längs linjen $(x,y) = (t,2t)$:

$$\begin{aligned} f(t,2t) &= e^{4t} - 4t - 8t^2 \\ &= 1 + 4t + \tfrac{1}{2!}(4t)^2 + \tfrac{1}{3!}(4t)^3 + O(t^4) - 4t - 8t^2 \\ &= 1 + \tfrac{32}{3}t^3 + O(t^4) \\ &= 1 + t^3\Big(\tfrac{32}{3} + O(t)\Big). \end{aligned}$$

Uttrycket inom parentes är positivt för alla t tillräckligt nära noll (eftersom det går mot $\frac{32}{3}$ då $t \to 0$), medan faktorn t^3 framför växlar tecken. Det finns alltså något $\delta > 0$ sådant att $f(t,2t) < 1$ i intervallet $-\delta < t < 0$ och $f(t,2t) > 1$ i intervallet $0 < t < \delta$, och därmed är $f(0,0) = 1$ varken ett lokalt minimum eller ett lokalt maximum.

Svar: f har inte lokalt extremvärde i origo.