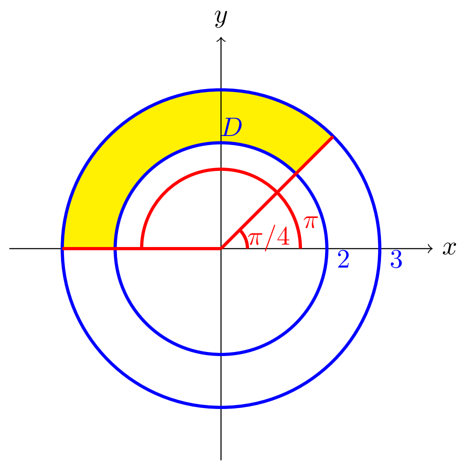
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-08-22

1. Området D ges i polära koordinater av $2 \le \rho \le 3$, $\pi/4 \le \varphi \le \pi$:



$$\iint_D x^2\,dxdy = \int_{\pi/4}^{\pi}\left(\int_2^3 \rho^2\cos^2\varphi\rho\,d\rho\right)d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\cdot\int_2^3\rho^3\,d\rho$$
$$= \left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi}\cdot\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_2^3 = \frac{195\pi-130}{32}.$$

Svar: $\frac{195\pi-130}{32}$**.**

2. $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (\cos x, ze^y, e^y)$, $\nabla f(\pi,0,4) = (\cos\pi, 4e^0, e^0) = (-1,4,1)$. Funktionen avtar snabbast i riktning $\overline{v} = -\nabla f(\pi,0,4) = (1,-4,-1)$. Riktningsderivatan i denna riktning ges av

$$f'_{\overline{v}}(\pi,0,4) = \frac{\nabla f(\pi,0,4)\bullet\overline{v}}{|\overline{v}|} = -|\nabla f(\pi,0,4)| = -\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2} = -\sqrt{18}.$$

Svar: Avtar snabbast i riktningen $\overline{v} = (1,-4,-1)$. Riktningsderivatan i denna riktning är $-\sqrt{18}$.

3. För en allmän funktion w har vi enligt kedjeregeln

$$(*)\quad w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = /u'_y = 2,\quad v'_y = -3y^2/ = 2w'_u - 3y^2 w'_v.$$

Vi kommer använda denna formel för $w = z$, $w = z'_u$ samt $w = z'_v$ nedan. Med $w = z$ i $(*)$ får vi

$$z'_y = 2z'_u - 3y^2 z'_v.$$

$$\begin{aligned} z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (2z'_u - 3y^2 z'_v)'_y = /\text{ Linjäritet/produktregeln }/\\ &= 2(z'_u)'_y - 6yz'_v - 3y^2(z'_v)'_y = /w = z'_u \text{ respektive } w = z'_v \text{ i } (*)/\\ &= 2(2(z'_u)'_u - 3y^2(z'_u)'_v) - 6yz'_v - 3y^2(2(z'_v)'_u - 3y^2(z'_v)'_v) = 4z''_{uu} - 12y^2 z''_{uv} + 9y^4 z''_{vv} - 6yz'_v. \end{aligned}$$

Ovan använde vi att $z(x,y)$ är $\mathcal{C}^2$ så att $z''_{uv} = z''_{vu}$.

Svar: $z'_y = 2z'_u - 3y^2 z'_v$, $z''_{yy} = 4z''_{uu} - 12y^2 z''_{uv} + 9y^4 z''_{vv} - 6yz'_v$.

4. Med

$$\begin{cases} u = x + 2y + 3z \\ v = 2x + y + z \\ w = 3x + 2y + z \end{cases}$$

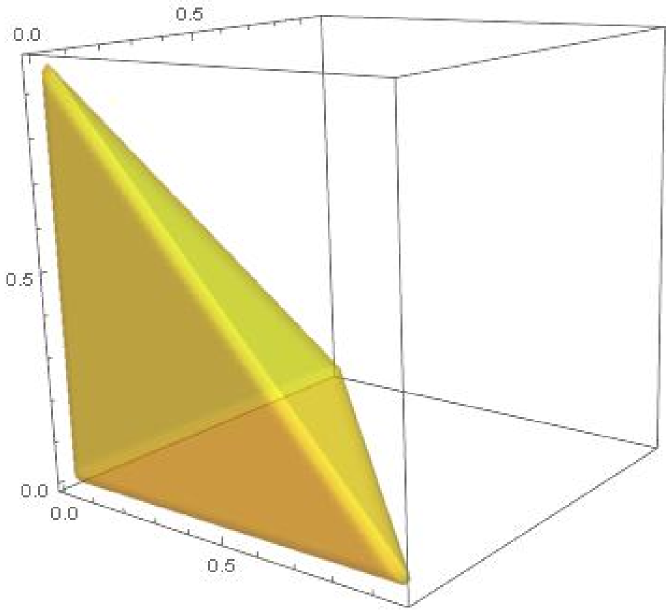
får vi

$$6x + 5y + 5z = u + v + w.$$

Så i uvw-koordinaterna ges planen av $u = 0$,$v = 0$, $w = 0$ samt $u + v + w = 1$. Det område som dessa begränsar ges av $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1 - u$, $0 \le w \le 1 - u - v$.

$$dxdydz = \left|\frac{d(x,y,z))}{d(u,v,w)}\right| dudvdw = \left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right|^{-1} dudvdw = \frac{1}{4} dudvdw.$$

Bild av området i uvw-rummet:



$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} \left(\int_0^{1-u-v} \frac{1}{4} dw\right) dv\right) du =$$
$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)dv\right) du = \frac{1}{4}\int_0^1 \left[v(1-u) - \frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u} du =$$
$$\frac{1}{4}\int_0^1 \left((1-u)^2 - \frac{(1-u)^2}{2}\right) du = \ldots = \frac{1}{24}$$

Svar: 1/24.

5. (a): Med sfäriska koordinater får vi:

$$\frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2+x^2z^2} = \frac{r^3(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^3\theta+\cos^3\theta)}{r^2+r^4\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{r\overbrace{(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^3\theta+\cos^3\theta)}^{\text{Begränsad.}}}{1+r^2\underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta}_{\text{Begränsad}}}.$$

Eftersom täljaren går mot 0 och nämnaren mot 1 då $r \to 0$, samt att $r \to 0$ om $(x,y,z) \to (0,0,0)$ följer det att

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y+z^3}{x^2+y^2+z^2+x^2z^2} = 0.$$

(b): Om vi går mot $(0,0)$ längs $y=0$ får vi

$$\frac{x^4}{x^4+x^3} = \frac{x}{1+x} \to 0 \text{ då } x \to 0.$$

Om vi går mot $(0,0)$ längs $y=x$ får vi

$$\frac{x^4+x^4}{x^4+(x-x)^3} = \frac{2x^4}{x^4} = \frac{2}{1} \to 2 \text{ då } x \to 0.$$

Eftersom vi får olika värden längs med dessa kurvor existerar inte gränsvärdet.

Svar: (a): 0. (b): Gränsvärdet existerar ej.

6. Eftersom ekvationerna är av klass $\mathcal{C}^1$ kan vi enligt implicita funktionssatsen lösa ut y och z som $\mathcal{C}^1$-funktioner av x lokalt kring punkten $(1,2,0)$ eftersom denna punkt dels uppfyller ekvationerna:

$$\begin{cases} 1+1\cdot 2+\mathrm{e}^0 = 4, \\ 1\cdot 2^2 - \ln(1+0) = 4, \end{cases}$$

samt uppfyller med

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x+xy+\mathrm{e}^z = 4, \\ G(x,y,z) = xy^2-\ln(1+z) = 4, \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} F'_y(1,2,0) & F'_z(1,2,0) \\ G'_y(1,2,0) & G'_z(1,2,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Vidare har vi*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} F'_y(1,2,0) & F'_z(1,2,0) \\ G'_y(1,2,0) & G'_z(1,2,0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_x(1,2,0) \\ G'_x(1,2,0) \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -8/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: $y'(1) = -7/5$, $z'(1) = -8/5$.

*Detta ekvationssystem kan också fås fram genom att derivera ekvationerna direkt (där vi betraktar y, z som funktioner av x):

$$\begin{cases} (x+xy(x)+\mathrm{e}^{z(x)})' = 1+y(x)+xy'(x)+z'(x)\mathrm{e}^{z(x)} = 0, \\ (xy(x)^2-\ln(1+z(x)))' = y(x)^2+2xy(x)y'(x)-\frac{z'(x)}{1+z(x)} = 0. \end{cases}$$

Med $x=1$, $y(1)=2$ och $z(1)=0$ insatt får vi

$$\begin{cases} 1+1\cdot 2+1\cdot y'(1)+z'(1)\mathrm{e}^0 = 0, \\ 2^2+2\cdot 1\cdot 2\cdot y'(1)-\frac{z'(1)}{1+0} = 0. \end{cases}$$