

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2019-08-22 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D x^2 dx dy$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \leq y, y \geq 0\}$.

2. Låt $f(x, y, z) = \sin x + ze^y$. Bestäm den riktning i vilken funktionen f **avtar** snabbast i punkten $(\pi, 0, 4)$, samt beräkna riktningsderivatan i denna riktning (i den punkten).
3. Låt $z(x, y)$ vara av klass \mathcal{C}^2 . Bestäm z'_y och z''_{yy} uttryckta i derivator med avseende på u och v om

$$\begin{cases} u = -5x + 2y, \\ v = -7x - y^3. \end{cases}$$

(Koefficienterna framför derivatorna i svaret får bero på x och y .)

4. Beräkna volymen av den tetraeder som avgränsas av planen

$$x + 2y + 3z = 0, 2x + y + z = 0, 3x + 2y + z = 0 \text{ samt } 6x + 5y + 5z = 1.$$

5. Undersök gränsvärdena:

$$(a) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2y + z^3}{x^2 + y^2 + z^2 + x^2z^2}. \quad (1p)$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^4 + (x - y)^3}. \quad (2p)$$

6. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + xy + e^z = 4, \\ xy^2 - \ln(1 + z) = 4 \end{cases}$$

lokalt i någon omgivning till $(1, 2, 0)$ definierar y och z entydigt som \mathcal{C}^1 -funktioner av x . Beräkna även $y'(1)$ och $z'(1)$ för dessa.