Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2019-10-23

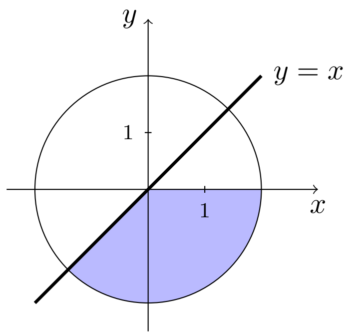
1. (a) Funktionen $f(x,y) = x^2+3y^2+4xy = (x+2y)^2 - y^2$ är en indefinit kvadratisk form, och har därmed sadelpunkt i origo.

   (b) Origo är inte ens en stationär punkt för funktionen $f(x,y) = x^2+5y^2+4xy+x$, eftersom $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$.

   (c) Omskrivningen $f(x,y) = x^2+4y^2+4xy+x^3 = (x+2y)^2+x^3$ visar att $f(t,-t/2) = t^3$, vilket växlar tecken då t växlar tecken. I varje omgivning till origo finns det alltså dels punkter där $f(x,y)$ är större än $f(0,0)=0$, dels punkter där $f(x,y)$ är mindre.

   Svar: Origo är inte en lokal extrempunkt för f i något av fallen.

2. Området D är en cirkelsektor med radie 2:



Polära koordinater, samt det faktum att D upptar 3/8 av hela cirkelskivans area, ger

$$\begin{aligned}
\iint_D (y-1)\,dxdy &= \iint_D y\,dxdy - \iint_D dxdy \\
&= \iint\limits_{\substack{0\le\rho\le 2\\ -3\pi/4\le\varphi\le 0}} \rho\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi - \text{Area}(D) \\
&= \left(\int_{\rho=0}^{2}\rho^2 d\rho\right)\left(\int_{\varphi=-3\pi/4}^{0}\sin\varphi\,d\varphi\right) - \frac{3}{8}\cdot\pi\cdot 2^2 \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{2}\Big[-\cos\varphi\Big]_{\varphi=-3\pi/4}^{0} - \frac{3\pi}{2} \\
&= \frac{8}{3}\left(-\cos 0 + \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right) - \frac{3\pi}{2} = -\frac{8}{3}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: Se ovan.

(Notera att svaret måste bli negativt, eftersom $y-1<0$ då $(x,y)\in D$.)

3. Sätt $F(x,y) = x^2y+x+y^5$, så att ekvationen är $F(x,y) = -3$. Funktionen F är uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$ (t.o.m. av klass $\mathcal{C}^\infty$), punkten $(2,-1)$ uppfyller ekvationen, samt

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy+1 \\ x^2+5y^4 \end{pmatrix} \implies \nabla F(2,-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

så att $F'_y(2,-1) = 9 \neq 0$. Förutsättningarna för implicita funktionssatsen är alltså uppfyllda, och den säger då att ekvationen implicit definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x)$ nära punkten ifråga, vilket skulle visas.

Definitionsmässigt gäller $f(2) = -1$, och derivering av identiteten $F(x,f(x)) = x^2 f(x) + x + f(x)^5 = -3$ (för x i ett intervall kring 2) ger

$$0 = \frac{d}{dx}\Big(F(x,f(x))\Big) = 2xf(x) + x^2 f'(x) + 1 + 5f(x)^4 f'(x).$$

Insättning av $x = 2$ ger $0 = 2\cdot 2\cdot(-1) + 2^2 f'(2) + 1 + 5\cdot(-1)^4 f'(2) = 9f'(2) - 3$, alltså $f'(2) = 1/3$.

(Man kan även använda formeln $f'(2) = -\dfrac{F'_x(2,-1)}{F'_y(2,-1)} = -\dfrac{-3}{9} = \dfrac{1}{3}$.)

Svar: Bevis enligt ovan. $f(2) = -1$ och $f'(2) = 1/3$.

4. Insättning av linjens parameterekvation $(x,y,z) = (1,-1+t,2+t)$ i ytans ekvation $z = x^3 + 2xy$ ger $2+t = 1^3 + 2\cdot 1\cdot(-1+t)$, dvs. $t = 3$. Linjen skär alltså ytan i punkten $(1,2,5)$. Skriv ytans ekvation som $F(x,y,z) = x^3 + 2xy - z = 0$ för att beräkna normalvektorn $\mathbf{n}$ i punkten:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+2y \\ 2x \\ -1 \end{pmatrix} \quad \implies \quad \mathbf{n} = \nabla F(1,2,5) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tangentplanets ekvation är därmed $7x + 2y - z = D$, där insättning av $(1,2,5)$ ger $D = 6$.

(Alternativt, skriv ytans ekvation som $z = f(x,y) = x^3 + 2xy$ och ta fram tangentplanet såhär: $z = f(1,2) + f'_x(1,2)\,(x-1) + f'_y(1,2)\,(y-2) = 5 + 7(x-1) + 2(y-2) = 7x + 2y - 6$.)

Svar: $7z + 2y - z = 6$.

5. Med det föreslagna variabelbytet $u = x$, $v = 2x^2 + y$ får man från kedjeregeln att

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + 4x\, z'_v$$

och

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_v,$$

så PDE:n $z'_x - 4x\, z'_y = 3z$ uttryckt i de nya variablerna blir

$$z'_u = 3z.$$

Denna differentialekvation frågar vilka funktioner som är lika med sin egen derivata, sånär som på en faktor 3. Vi kan betrakta det som känt från TATA42 att en sådan funktion måste vara en konstant gånger e^{3u}, där "konstanten" i detta fall får bero på v, eftersom det rör sig om partiell derivata $\partial/\partial u$. Eller så kan man härleda detta, t.ex. genom multiplikation med den integrerande faktorn e^{-3u}:

$$\begin{aligned} z'_u - 3z = 0 &\iff e^{-3u} z'_u + (-3e^{-3u})z = 0 \\ &\iff \tfrac{\partial}{\partial u}(e^{-3u} z) = 0 \\ &\iff e^{-3u} z(u,v) = g(v) \\ &\iff z(u,v) = g(v)\, e^{3u}. \end{aligned}$$

I de ursprungliga variablerna får vi alltså

$$z(x,y) = g(2x^2 + y)\, e^{3x},$$

där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret $z(1,y) = y^2$ ger $g(2+y)\, e^3 = y^2$, alltså $g(t) = (t-2)^2 e^{-3}$, och lösningen blir därmed

$$z(x,y) = (2x^2 + y - 2)^2\, e^{3x} e^{-3}.$$

Svar: $z(x,y) = (2x^2 + y - 2)^2\, e^{3(x-1)}$.

6. Vi kan först notera även i denna uppgift att svaret måste bli negativt; olikheterna $0 \le z \le -y$ och $x \le y$ visar ju att $x \le 0$ då $(x,y) \in D$.

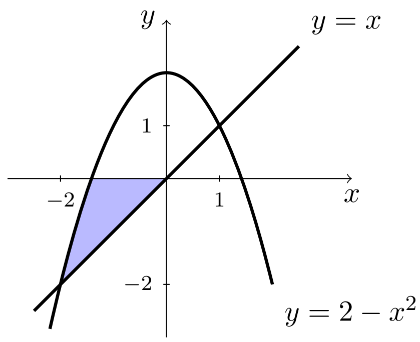
För uträkning av integralen kan man t.ex. använda stavar i z-led:

$$\iiint_D x\,dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=0}^{-y} x\,dz \right) dxdy,$$

där D:s projektion på xy-planet är

$$E = \Big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \le y \le 2 - x^2,\ 0 \le -y \Big\},$$

alltså de punkter som ligger ovanför linjen $y = x$ och nedanför parabeln $y = 2 - x^2$ samt har negativ y-koordinat:



Detta ger

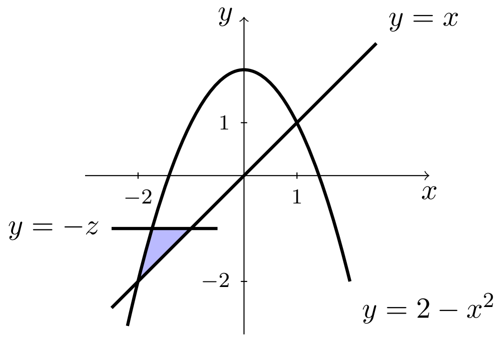
$$\begin{aligned}
\iiint_D x\,dxdydz &= \iint_E (-xy)\,dxdy = \int_{y=-2}^{0} \left(\int_{x=-\sqrt{2-y}}^{y} (-xy)\,dx \right) dy \\
&= \int_{y=-2}^{0} \Big[-\tfrac{1}{2} x^2 y \Big]_{x=-\sqrt{2-y}}^{y}\, dy \\
&= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{0} \Big(y(2-y) - y^3 \Big) dy = \tfrac{1}{2} \Big[y^2 - \tfrac{1}{3} y^3 - \tfrac{1}{4} y^4 \Big]_{-2}^{0} = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Även med skivor för fixt z fås en ganska kort lösning. Tvärsnittet är

$$D_z = \Big\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \le y \le 2 - x^2,\ y \le -z \Big\}$$

(se figur på nästa sida), där villkoret $z \ge 0$ är givet, och $z \le 2$ krävs för att D_z inte ska vara tomma mängden. Detta ger

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\,dxdydz &= \int_{z=0}^{2} \left(\iint_{D_z} x\,dxdy \right) dz \\
&= \int_{z=0}^{2} \left(\int_{y=-2}^{-z} \left(\int_{x=-\sqrt{2-y}}^{y} x\,dx \right) dy \right) dz = \cdots = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

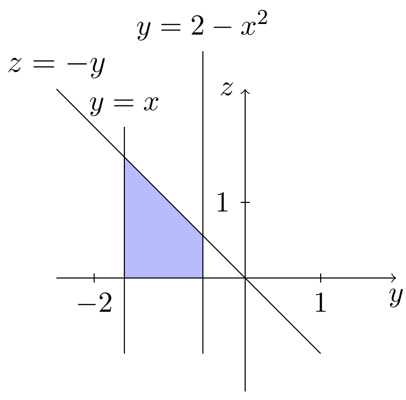


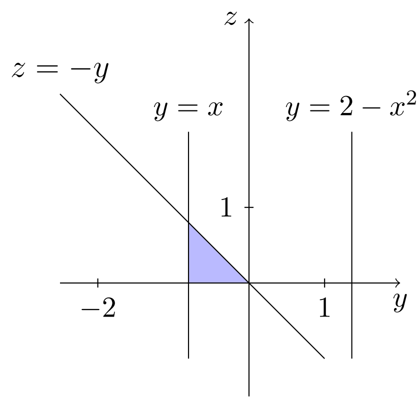
Ett annat framkomligt alternativ är att använda skivor för fixt x:

$$\iiint_D x\,dxdydz = \int_{x=-2}^{0} \left(\iint_{D_x} x\,dydz \right) dx = \int_{-2}^{0} x \text{ Area}(D_x)\,dx.$$

Tvärsnittet D_x består av de punkter (y,z) som ligger i remsan till höger om linjen $y = x$ och till vänster om linjen $y = 2 - x^2$ (och här måste $-2 \le x \le 1$ gälla för att den första linjen ska ligga till vänster om den andra) samt i sektorn ovanför linjen $z = 0$ och nedanför linjen $z = -y$ (och här måste $x \le 0$ gälla om remsan ovan ska överlappa denna sektor, alltså $-2 \le x \le 0$ allt som allt).

Tvärsnittet ser olika ut beroende på om linjen $y = 2 - x^2$ ligger till vänster eller till höger om z-axeln, alltså om $-2 \le x \le -\sqrt{2}$ (vänstra figuren) eller $-\sqrt{2} < x \le 0$ (högra figuren):





I det senare fallet består D_x av en halv kvadrat med sidan $|x|$, så att $\text{Area}(D_x) = \frac{1}{2}x^2$, medan man i det förstnämnda fallet måste dra bort en halv kvadrat med sidan $|2 - x^2|$, så att $\text{Area}(D_x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(2 - x^2)^2$.

Alltså

$$
\begin{aligned}
\iiint_D x\,dxdydz &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} x\Big(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}(2-x^2)^2\Big)\,dx + \int_{-\sqrt{2}}^{0} x\cdot\tfrac{1}{2}x^2\,dx \\
&= \int_{-2}^{0} \tfrac{1}{2}x^3\,dx - \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}x(2-x^2)^2\,dx \\
&= \Big[\tfrac{1}{6}x^4\Big]_{-2}^{0} + \Big[\tfrac{1}{12}(2-x^2)^3\Big]_{-2}^{-\sqrt{2}} \\
&= (0-2) + \left(0 - \frac{-8}{12}\right) = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Även stavar i y-led fungerar. Från olikheterna $x \le y \le 2 - x^2$ och $y \le -z \le 0$ ser man att y måste uppfylla $x \le y \le \min(2-x^2, -z)$, så D:s projektion på xz-planet blir

$$
\begin{aligned}
F &= \Big\{(x,z) \in \mathbf{R}^2 : x \le \min(2-x^2, -z),\ -z \le 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,z) \in \mathbf{R}^2 : x \le 2-x^2,\ x \le -z,\ z \ge 0\Big\} \\
&= \Big\{(x,z) \in \mathbf{R}^2 : -2 \le x \le 1,\ x \le -z,\ z \ge 0\Big\},
\end{aligned}
$$

vilket är en triangel med hörn i $(x,z) = (0,0)$, $(-2,0)$ och $(-2,2)$. Dela denna triangel längs kurvan $z = x^2 - 2$ i delområden F_1 och F_2 där $2 - x^2 \le -z$ resp. $2 - x^2 > -z$; detta ger

$$
\begin{aligned}
\iiint_D x\,dxdydz &= \iint_E \left(\int_{y=x}^{\min(2-x^2,-z)} x\,dy\right) dxdz \\
&= \iint_{F_1} \left(x \int_{y=x}^{2-x^2} dy\right) dxdz + \iint_{F_2} \left(x \int_{y=x}^{-z} dy\right) dxdz \\
&= \int_{x=-2}^{-\sqrt{2}} \left(\int_{z=0}^{x^2-2} x(2-x^2-x)\,dz\right) dx \\
&\quad + \int_{z=0}^{2} \left(\int_{x=-\sqrt{z+2}}^{-z} x(-z-x)\,dx\right) dz \\
&= \cdots = \frac{4-8\sqrt{2}}{15} + \frac{8(-3+\sqrt{2})}{15} = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Svar: $-4/3$.