Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2020-01-09

1. Derivering av $f(x,y) = x^2 - xy^5$ ger $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y^5 \\ -5xy^4 \end{pmatrix}$, och i synnerhet
$$\nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix},$$
vilket är den riktning som $\mathbf{v}$ ska ha för att maximera riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(2,1)$. Det återstår bara att **normera**, för att få en enhetsvektor:
$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{109}} \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$
Riktningsderivatans maximala värde ges av gradientens absolutbelopp:
$$f'_{\mathbf{v}}(2,1) = |\nabla f(2,1)| = \sqrt{109}.$$
Svar: Se ovan.

2. Innan vi börjar räkna kan vi notera att integranden x^2 gör att svaret måste bli positivt. Variabelbytet
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix},$$
med funktionaldeterminanten $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10$, ger en ny triangel E med hörn i $(u,v) = (0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Integralen blir därmed
$$\begin{aligned}
\iint_D x^2\,dxdy &= \iint_E (-2u-4v)^2 \cdot |-10|\,dudv = 40 \iint_E (u+2v)^2\,dudv \\
&= 40 \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=0}^{1-u} (u+2v)^2\,dv \right) du \\
&= 40 \int_{u=0}^{1} \left[\frac{(u+2v)^3}{6}\,dv \right]_{v=0}^{1-u} du = \frac{20}{3} \int_0^1 \Big((2-u)^3 - u^3 \Big) du \\
&= \frac{20}{3} \left[\frac{-(2-u)^4 - u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{3} \Big((-1^4 - 1^4) - (-2^4 - 0^4) \Big) \\
&= \frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}.
\end{aligned}$$
Svar: 70/3.

3. Funktionen $f(x,y) = x^2 + 6xy + 3y^2 + \frac{x^5}{10}$ har gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 6y + x^4/2 \\ 6x + 6y \end{pmatrix},$$

vilket är lika med nollvektorn då $y = -x$ och $2x + 6 \cdot (-x) + x^4/2 = 0$, dvs. då $(x,y) = (0,0)$ eller $(x,y) = (2,-2)$. Från andraderivatorna $f''_{xx} = 2 + 2x^3$, $f''_{xy} = 6$ och $f''_{yy} = 6$ fås de kvadratiska formerna i Taylorutvecklingarna kring dessa stationära punkter:

$$\tfrac{1}{2}\, Q_{(0,0)}(h,k) = h^2 + 6hk + 3k^2 = (h+3k)^2 - 6k^2 \quad \text{(indefinit)}$$

respektive

$$\tfrac{1}{2}\, Q_{(2,-2)}(h,k) = 9h^2 + 6hk + 3k^2 = 3\Big((k+h)^2 + 2h^2\Big) \quad \text{(positivt definit).}$$

Detta visar (enligt en känd sats) att $(0,0)$ är en sadelpunkt för f och att $(2,-2)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: Lokalt minimum i $(x,y) = (2,-2)$.

4. Stavar i z-led är den naturliga metoden, eftersom området D beskrivs av dubbelolikheten

$$x^2 + y^2 \le z \le 3 - 2x.$$

("Ovanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$, nedanför planet $z = 3 - 2x$.")

Projektionen $\widetilde{D}$ på xy-planet ges av

$$x^2 + y^2 \le 3 - 2x \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 \le 4.$$

Variabelbytet $u = x + 1$, $v = y$ (med $du dv = dx dy$) ger en cirkelskiva $u^2 + v^2 \le 4$, och dubbelintegralen över denna cirkelskiva E beräknas lämpligen med polära koordinater $u = \rho \cos\varphi$, $v = \rho \sin\varphi$. Såhär, alltså:

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\, dxdydz &= \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{3-2x} x\, dz \right) dxdy \\
&= \iint_{\widetilde{D}} x\Big(3 - 2x - x^2 - y^2\Big)\, dxdy \\
&= \iint_{\widetilde{D}} x\Big(4 - (x+1)^2 - y^2\Big)\, dxdy \\
&= \iint_E (u-1)(4 - u^2 - v^2)\, \rho\, d\rho d\varphi \\
&= \int_{\rho=0}^{2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} (\rho\cos\varphi - 1)(4-\rho^2)\rho\, d\varphi \right) d\rho \\
&= \int_{\rho=0}^{2} \Big(0 - 2\pi\rho(4-\rho^2)\Big)\, d\rho = \Big[\tfrac{1}{2}\pi(4-\rho^2)^2\Big]_0^2 = -8\pi.
\end{aligned}$$

Svar: -8π.

5. (a) De partiella derivatorna definieras av följande gränsvärden (om de existerar ändligt):

$$f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$
$$f'_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

(b) Vi har $f'_x(0,0) = 4$, eftersom

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{\frac{h^2+4h^3+7h^4}{h^2+0^2} - 1}{h} = 4 + 7h \to 4 \quad \text{då } h \to 0.$$

Men $f'_y(0,0)$ existerar inte, eftersom

$$\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{\frac{0^2+4\cdot 0^3+7\cdot 0^4}{0^2+k^2} - 1}{k} = \frac{0-1}{k} = -\frac{1}{k}$$

saknar ändligt gränsvärde då $k \to 0$. (För övrigt finns inte ens oegentligt gränsvärde, eftersom det blir olika beroende på om man kommer från positiva eller negativa hållet: $-1/k \to \mp\infty$ då $k \to 0^{\pm}$.)

Alternativ motivering: funktionen

$$y \mapsto f(0,y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0, \end{cases}$$

är inte kontinuerlig i $y = 0$, och kan därför inte heller vara deriverbar där.

Svar: $f'_x(0,0) = 4$, $f'_y(0,0)$ existerar inte.

6. (a) Först tar vi fram g' genom att integrera g'' (dvs. f); analysens huvudsats ger

$$g'(x) = \int_{s=0}^{x} g''(s)\,ds = \int_{s=0}^{x} f(s)\,ds,$$

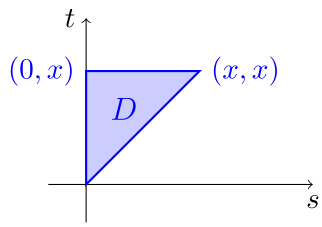
där vi har valt $s = 0$ som undre integrationsgräns för att villkoret $g'(0) = 0$ ska uppfyllas. Sedan får vi på samma sätt fram g genom att integrera g' och ta hänsyn till villkoret $g(0) = 0$:

$$g(x) = \int_{t=0}^{x} g'(t)\,dt = \int_{t=0}^{x} \left(\int_{s=0}^{t} f(s)\,ds \right) dt,$$

vilket skulle visas.

(b) Den upprepade enkelintegralen i (a) kan tolkas som en dubbelintegral över en triangel D i st-planet:

$$g(x) = \int_{t=0}^{x} \left(\int_{s=0}^{t} f(s)\,ds \right) dt = \iint_D f(s)\,dsdt.$$



Beräkning av denna integral med omvänd integrationsordning ger

$$\begin{aligned} g(x) &= \iint_D f(s)\,dsdt \\ &= \int_{s=0}^{x} \left(\int_{t=s}^{x} f(s)\,dt \right) ds \\ &= \int_{s=0}^{x} (x-s)\,f(s)\,ds, \end{aligned}$$

vilket är den efterfrågade formeln för g, en primitiv funktion till en primitiv funktion till f uttryckt med bara en enda bestämd enkelintegral.

Svar: $g(x) = \displaystyle\int_{s=0}^{x} (x-s)\,f(s)\,ds.$