Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Hemtentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2020-06-03 kl. 14.00–19.00

Observera att andra regler än normalt gäller. Följ instruktionerna noggrant.

- Alla hjälpmedel är tillåtna **utom** samarbete med annan person.
- Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt **handskrivna** – om inte särskilda skäl såsom funktionshinder föreligger – och avslutade med ett svar. (Det är också tillåtet att skriva för hand med ritpenna på ritplatta eller surfplatta, men endast handskriven text med **vit bakgrund**.)
- **Även om räknehjälpmedel är tillåtna ska uträkningar redovisas lika noga som vanligt, dvs. som om man inte hade några hjälpmedel.**
- Använd inte rödpenna. Lös högst en uppgift per sida. Numrera sidorna (sorterade i uppgiftsordning).

Uppgift som bedöms vara godkänd får 3 eller 2 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter samt minst 8/12/16 poäng. Länk till lösningsskiss publiceras på kursens hemsida preliminärt två dagar efter avslutad tentamen.

- Kontrollera innan uppladdning att sidorna i din pdf-fil är så pass tydliga att text och symboler går att läsa (annars kan vi inte rätta tentan).
- Märk varje blad med kurskod, program samt **flowID**.
- **Jour:** Se http://courses.mai.liu.se/GU/TATA69/jour.php

VAR GOD VÄND!

1. Avgör om följande funktioner har lokalt maximum, lokalt minumum eller ingetdera i den angivna punkten:

   (a) $f(x,y) = x - 2y + x^2 + 2xy + 3y^2$ i punkten $(x,y) = (0,0)$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x}{2} + 3y - \dfrac{3x^2}{4} - 3xy + 10y^2 + \dfrac{x^3}{3}$ i punkten $(x,y) = (1,0)$.

   (c) $f(x,y) = (x-y)^4$ i punkten $(x,y) = (0,0)$.

2. Låt $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y + 4)\,dxdy$, där D ges av $x^2 \leqslant -y$ och $x + y \geqslant -2$.

   (a) Avgör, utan att beräkna integralen, om $I > 0$ eller $I < 0$ (tydlig motivering krävs).

   (b) Beräkna I.

3. Låt $f(x,y) = g(x^2 + \cos y)$, där g är deriverbar.

   (a) Bestäm $\nabla f(1,\pi)$ uttryckt i g och dess derivator.

   (b) Bestäm $f'_{\overline{v}}(1,\pi)$, uttryckt i g och dess derivator, då $\overline{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

   (c) Antag att $g'(0) < 0$. Bestäm en enhetsvektor $\overline{u}$, sådan att f växer som snabbast i $\overline{u}$:s riktning i punkten $(x,y) = (1,\pi)$.

4. (a) Bestäm den allmänna $\mathcal{C}^1$-lösningen till den partiella differentialekvationen

   $$2x\,z'_x - y\,z'_y = x^2 y \qquad (x > 0)$$

   med hjälp av variabelbytet $u = x$, $v = y\sqrt{x}$.

   (b) Bestäm den lösning till ovanstående PDE som uppfyller bivillkoret $z(4,y) = 0$.

   (c) Redovisa en kontroll att lösningen i (a) uppfyller PDE:n och att lösningen i (b) uppfyller både PDE:n och bivillkoret.

5. Beräkna (eller visa divergens)

   $$\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2)z^2}\,dxdydz,$$

   där $D = \{(x,y,z) : 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant z\}$.

6. Avgör för vilka reella tal a och b som följande gränsvärde existerar ändligt, samt beräkna det i dessa fall:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{x^2 - 2y^3}{x^2 - ay^3}.$$