Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2020-06-03

1. (a) $\nabla f(0,0) = (1,-2) \neq (0,0)$ så origo är inte en stationär punkt, och således inte en lokal extrempunkt.
Svar: Varken lokalt maximum eller lokalt minimum.

(b) Derivering och insättning av punkten ger

$$f'_x = \frac{1}{2} - \frac{6x}{4} - 3y + x^2, \quad f'_x(1,0) = 0, \quad f'_y = 3 - 3x + 20y, \quad f'_y(1,0) = 0,$$

så $(1,0)$ är en stationär punkt. Vidare har vi

$$f''_{xx} = -\frac{3}{2} + 2x; \quad f''_{xx}(1,0) = \frac{1}{2}, \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{yy} = 20.$$

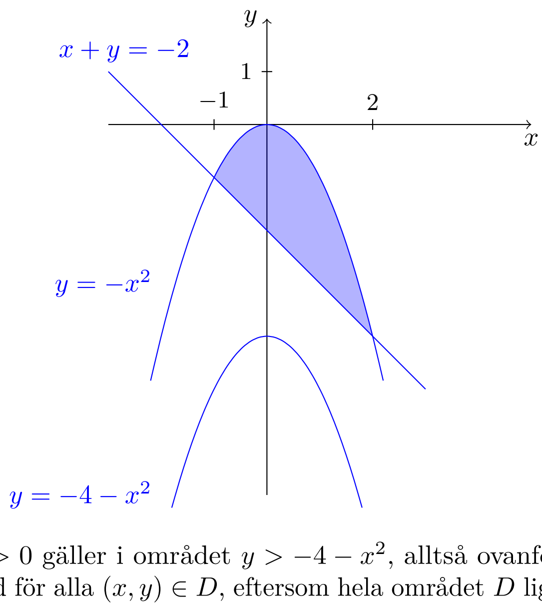
Den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= f''_{xx}(1,0)\,h^2 + 2f''_{xy}(1,0)\,hk + f''_{yy}(1,0)\,k^2 \\ &= \tfrac{1}{2}h^2 - 6hk + 20k^2 = \tfrac{1}{2}\big((h-6k)^2 - 36k^2\big) + 20k^2 = \tfrac{1}{2}(h-6k)^2 + 2k^2 \end{aligned}$$

är positivt definit (ty $Q(h,k) \geq 0$, med likhet omm $h - 6k = 0 = k$, dvs. $(h,k) = (0,0)$), så f har ett lokalt minimum i $(1,0)$.
Svar: Lokalt minimum.

(c) Eftersom $f(x,y) = (x-y)^4 \geq 0 = f(0,0)$ för alla (x,y) så har f ett globalt (och därmed även lokalt) minimum i $(0,0)$.
Svar: Lokalt minimum.

2. (a) Mängden D avgränsas av parabeln $y = -x^2$ och linjen $x + y = -2$:



Olikheten $x^2 + y + 4 > 0$ gäller i området $y > -4 - x^2$, alltså ovanför kurvan $y = -4 - x^2$. Därmed är den uppfylld för alla $(x,y) \in D$, eftersom hela området D ligger ovanför den kurvan. (Man kan även visa detta genom att resonera med olikheter: för $(x,y) \in D$ gäller $y \geq -2 - x$ och därmed $x^2 + y + 4 \geq x^2 + (-2-x) + 4 = x^2 - x + 2 = (x - 1/2)^2 + 7/4 \geq 7/4 > 0$.) Eftersom integranden $x^2 + y + 4$ alltså är positiv på integrationsområdet D måste integralen I vara positiv.
Svar: $I > 0$.

(b) Kurvorna $y = -x^2$ och $y = -2 - x$ skär varandra då $x = -1$ eller $x = 2$. Så $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 2, -2 - x \leq y \leq -x^2\}$ och

$$I = \iint_D (x^2 + y + 4)\,dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{-2-x}^{-x^2} (x^2 + y + 4)\,dy \right) dx = \cdots = \frac{279}{20}.$$

Svar: $279/20$.

3. (a) Kedjeregeln ger $\nabla f = (f'_x, f'_y) = (g'(x^2+\cos y)\cdot 2x, g'(x^2+\cos y)\cdot(-\sin y))$. Eftersom $g'(1^2+\cos\pi) = g'(0)$ får vi $\nabla f(1,\pi) = (g'(0)\cdot 2\cdot 1, g'(0)\cdot(-\sin\pi)) = 2g'(0)\,(1,0)$.
Svar: $2g'(0)\,(1,0)$.

(b) Vi observerar att $\overline{v}$ har längd 1, så $f'_{\overline{v}}(1,\pi) = \nabla f(1,\pi)\cdot\overline{v} = 2g'(0)\,(1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{4}{\sqrt{5}}\,g'(0)$.
Svar: $\dfrac{4\,g'(0)}{\sqrt{5}}$.

(c) Riktningen för snabbaste tillväxt fås genom att normera gradienten:

$$\overline{u} = \frac{\nabla f(1,\pi)}{|\nabla f(1,\pi)|} = \frac{2g'(0)(1,0)}{|2g'(0)(1,0)|} = \frac{g'(0)}{|g'(0)|}(1,0) = \Big[\text{eftersom } g'(0) < 0\Big] = -(1,0) = (-1,0).$$

Svar: $(-1,0)$.

4. (a) Med $u = x$ och $v = y\sqrt{x}$ fås

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 0, \quad v'_x = \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad v'_y = \sqrt{x}.$$

Detta ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + \frac{y}{2\sqrt{x}} z'_v, \qquad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = \sqrt{x} z'_v,$$

så att

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\Big(z'_u + \frac{y}{2\sqrt{x}} z'_v\Big) - y(\sqrt{x}z'_v) = 2xz'_u = 2uz'_u = x^2 y = u^{3/2}v.$$

Alltså $2uz'_u = u^{3/2}v$, vilket (eftersom $u = x > 0$ enligt förutsättning) är ekvivalent med

$$z'_u = \frac{\sqrt{u}v}{2}.$$

Integration m.a.p. u ger $z(u,v) = \frac{1}{3}u^{3/2}v + f(v)$ för $u > 0$, där $f(v)$ är en godtycklig envariabelfunktion av klass $\mathcal{C}^1$, alltså $z(x,y) = \frac{1}{3}x^2 y + f(y\sqrt{x})$ för $x > 0$.
Svar: $z(x,y) = \dfrac{x^2 y}{3} + f(y\sqrt{x})$, där $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

(b) Bivillkoret är $0 = z(4,y) = \frac{16y}{3} + f(2y)$. Med $t = 2y$ fås $0 = \frac{8t}{3} + f(t)$, dvs. $f(t) = -8t/3$, så att $z(x,y) = \dfrac{x^2 y}{3} - \dfrac{8y\sqrt{x}}{3}$. **Svar:** $z(x,y) = \dfrac{x^2 y}{3} - \dfrac{8y\sqrt{x}}{3}$.

(c) Derivering av den allmänna lösningen $z = \frac{1}{3}x^2 y + f(y\sqrt{x})$ från (a) med kedjeregeln ger

$$z'_x = \frac{2xy}{3} + f'(y\sqrt{x})\frac{y}{2\sqrt{x}}, \qquad z'_y = \frac{x^2}{3} + f'(y\sqrt{x})\sqrt{x}.$$

(Observera att det måste stå f' på båda ställena här; att skriva f'_x resp. f'_y är fel.) Så

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\left(\frac{2xy}{3} + f'(y\sqrt{x})\frac{y}{2\sqrt{x}}\right) - y\left(\frac{x^2}{3} + f'(y\sqrt{x})\sqrt{x}\right) = \cdots = x^2 y,$$

vilket visar att lösningen i (a) är korrekt.
Derivering av partikulärlösningen $z = \frac{1}{3}x^2 y - \frac{8}{3}y\sqrt{x}$ från (b) ger på motsvarande sätt

$$z'_x = \frac{2xy}{3} - \frac{4y}{3\sqrt{x}}, \qquad z'_y = \frac{x^2}{3} - \frac{8\sqrt{x}}{3},$$

så att

$$2xz'_x - yz'_y = 2x\left(\frac{2xy}{3} - \frac{4y}{3\sqrt{x}}\right) - y\left(\frac{x^2}{3} - \frac{8\sqrt{x}}{3}\right) = \ldots = x^2 y.$$

Vidare gäller

$$z(4,y) = \frac{4^2 y}{3} - \frac{8y\sqrt{4}}{3} = 0,$$

så även bivillkoret är uppfyllt.

5. Integralen är generaliserad, men eftersom integranden är positiv kan vi tillämpa Fubinis sats och får

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2)z^2}\,dxdydz &= \iint_{x^2+y^2\geq 4}\left(\int_{z=x^2+y^2}^{\infty}\frac{1}{(x^2+y^2)z^2}\,dz\right)dxdy \\
&= \iint_{x^2+y^2\geq 4}\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-1}{(x^2+y^2)z}\right]_{z=x^2+y^2}^{\omega} dxdy = \iint_{x^2+y^2\geq 4}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= [\text{pol. koord.}] = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\rho=2}^{\infty}\frac{\rho\,d\rho}{\rho^4}\right)d\varphi = 2\pi\lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{2\rho^2}\right]_2^R = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Svar: Integralen är konvergent med värdet $\pi/4$.

6. Vi har följande fall att beakta:

- $a \neq 0$ och $b \neq 0$:
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2-ay^3} \to \frac{-2b^3}{-ab^3} = \frac{2}{a} \quad \text{då } (x,y)\to(0,b),$$
eftersom nämnaren går mot $-ab^3 \neq 0$, och vi kan förkorta bort $b^3 \neq 0$. Så gränsvärdet existerar och är $2/a$.
- $a = 2$ och $b = 0$: Eftersom $b = 0$ ska vi undersöka gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$. Insättning av $a = 2$ ger
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2-ay^3} = \frac{x^2-2y^3}{x^2-2y^3} = 1$$
för alla (x,y) där uttrycket är definierat (dvs. överallt utom längs kurvan $x^2 = 2y^3$), så gränsvärdet då $(x,y)\to(0,0)$ existerar och är 1.
- $a \neq 2$ och $a \neq 0$, samt $b = 0$: Även här ska $(x,y)\to(0,0)$. Längs linjen $x = 0$ får vi
$$\frac{0^2-2y^3}{0^2-ay^3} = \frac{2}{a} \to \frac{2}{a} \quad \text{då } y \to 0,$$
men längs linjen $y = 0$ får vi
$$\frac{x^2-2\cdot 0^2}{x^2-a\cdot 0^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \quad \text{då } x\to 0,$$
så gränsvärdet existerar ej.
- $a = 0$: Vi har uttrycket
$$\frac{x^2-2y^3}{x^2} = 1 - \frac{2y^3}{x^2}.$$
Detta uttryck är lika med 0 resp. 1 längs kurvorna $2y^3 = x^2$ resp. $y = 0$ (med origo undantaget i båda fallen), så det saknar gränsvärde i origo (dvs. gränsvärdet existerar ej i fallet $b = 0$). Om $b \neq 0$ har vi
$$1 - \frac{2y^3}{x^2} \to \begin{cases} -\infty & \text{om } b > 0 \\ \infty & \text{om } b < 0 \end{cases} \quad \text{då } (x,y)\to(0,b),$$
så gränsvärdet är inte ändligt. Oavsett b:s värde existerar alltså inte gränsvärdet ändligt när $a = 0$.

Svar: Gränsvärdet existerar ändligt omm a och b båda är nollskilda (och är då $2/a$) eller $(a,b) = (2,0)$ (och är då 1).