Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2020-08-20

1. (a) $z = \sin(2x+y^2)+xy$, $z'_x = 2\cos(2x+y^2)+y$, $z'_y = 2y\cos(2x+y^2)+x$ ger att

$$yz'_x - z'_y = y(2\cos(2x+y^2)+y) - (2y\cos(2x+y^2)+x) = y^2 - x.$$

Svar: $yz'_x - z'_y = y^2 - x$.

(b)

$$z(3,1) = g(2\cdot 3 + 1^2) = g(7).$$

$z = g(2x+y^2)$, $z'_x = 2g'(2x+y^2)$, $z'_y = 2yg'(2x+y^2)$ ger att

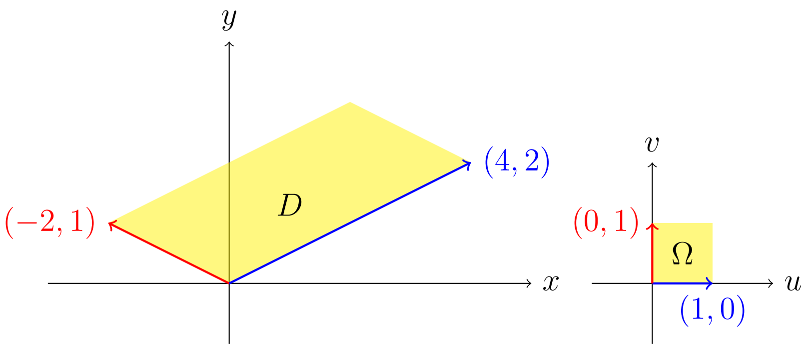
$$yz'_x - z'_y = y\cdot 2g'(2x+y^2) - 2yg'(2x+y^2) = 0.$$

Svar: $z(3,1) = g(7)$, $yz'_x - z'_y = 0$.

2. Med variabelbytet (som fås med basbyte till basen $((4,2) \quad (-2,1))$)

$$\begin{cases} x = 4u - 2v \\ y = 2u + v \end{cases}$$

avbildas punkterna $(0,0), (0,1), (1,1)$ respektive $(1,0)$ i uv-planet på $(0,0), (-2,1), (2,3)$ respektive $(4,2)$ i xy-planet.



D.v.s. kvadraten Ω som ges av $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ avbildas via denna transformation på vårt område D via detta variabelbyte. Vidare har vi

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Alltså får vi

$$\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (4u-2v)(2u+v) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du \right) dv \\
&= 8 \int_0^1 \left(\int_0^1 (8u^2 - 2v^2) du \right) dv = 8 \int_0^1 \left[8u^3/3 - 2uv^2 \right]_{u=0}^1 dv \\
&= 8 \int_0^1 (8/3 - 2v^2) dv = 8 \left[8v/3 - 2v^3/3 \right]_{v=0}^1 = 16.
\end{aligned}$$

Svar: 16.

3. Eftersom $\ln(1+t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ får vi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 3 - \ln(1+x^2) - 4xy - 6y^2 - x^3 = 3 - x^2 - 4xy - 6y^2 + \underbrace{\mathcal{O}(x^4) - x^3}_{\mathcal{O}(|(x,y)|^3)} \\
&= 3 - x^2 - 4xy - 6y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3).
\end{aligned}$$

Alternativt kan detta fås direkt från Taylors formel. Eftersom

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 3, \\
&f'_x = -\frac{2x}{1+x^2} - 4y - 3x^2, \quad f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y = -4x - 12y, \quad f'_y(0,0) = 0, \\
&f''_{xx} = -\frac{2}{1+x^2} + \frac{4x^2}{(1+x^2)^2} - 6x, \quad f''_{xx}(0,0) = -2, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = -12
\end{aligned}$$

får vi med dessa siffror insatta i Taylors formel:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \\
&\quad + \frac{1}{2} f''_{xx}(0,0)x^2 + f''_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f''_{yy}(0,0)y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3) \\
&= 3 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}(-2)x^2 - 4 \cdot xy + \frac{1}{2}(-12)y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3) \\
&= 3 - x^2 - 4xy - 6y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3).
\end{aligned}$$

Eftersom det inte finns några förstagradstermer i Taylorutvecklingen är gradienten till f noll i origo, så detta är en stationär punkt. Vidare gäller att den kvadratiska formen

$$-x^2 - 4xy - 6y^2 = -(x+2y)^2 - 2y^2$$

endast är noll i origo, och annars strikt negativ, alltså negativt definit. Därför är origo ett lokalt maximum till f.

Svar: $f(x,y) = 3 - x^2 - 4xy - 6y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$. Origo är ett lokalt maximum.

4. Låt $g(x,y) = x^2 + x\cos y - e^y$. Nu gäller att g är av klass $\mathcal{C}^1$ och

$$g(1,\pi/2) = 1^2 + 1\cdot\cos(\pi/2) - e^{\pi/2} = 1 - e^{\pi/2},$$

så punkten $(1,\pi/2)$ ligger på kurvan (d.v.s. uppfyller ekvationen). Vidare gäller $g'_y = -x\sin y - e^y$ så

$$g'_y(1,\pi/2) = -1\sin(\pi/2) - e^{\pi/2} = -1 - e^{\pi/2} \neq 0.$$

Alltså följer det från implicita funktionssatsen att funktionen $y = f(x)$ som efterfrågas existerar. Per definition gäller nu $f(1) = \pi/2$ (eftersom grafen går genom den givna punkten $(x,y) = (1,\pi/2)$).

Vidare får vi

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(x^2 + x\cos(f(x)) - e^{f(x)}\right)\\ &= 2x + \cos(f(x)) - xf'(x)\sin(f(x)) - f'(x)e^{f(x)} = \frac{d}{dx}(1 - e^{\pi/2}) = 0.\end{aligned}$$

Med $x = 1$ och $f(1) = \pi/2$ insatt i denna ekvation får vi

$$2\cdot 1 + \cos(\pi/2) - 1\cdot f'(1)\cdot\sin(\pi/2) - f'(1)e^{\pi/2} = 0,$$

vilket ger

$$f'(1) = \frac{2}{1 + e^{\pi/2}}.$$

Svar: $f(1) = \pi/2$, $f'(1) = 2/(1 + e^{\pi/2})$.

5. (a) Om vi går mot noll längs x- respektive y-axeln får vi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 + 0^4}{x^2 + 0^2} = 1$$

respektive

$$\lim_{y\to 0}\frac{0^2 + y^4}{0^2 + y^2} = 0.$$

Då dessa är olika existerar inte gränsvärdet.

Svar: Gränsvärdet existerar ej.

(b) Om vi går mot oändligheten längs x-axeln (t.ex.) får vi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{0^2}{0^2 + (0 - x^2)^4} = 0.$$

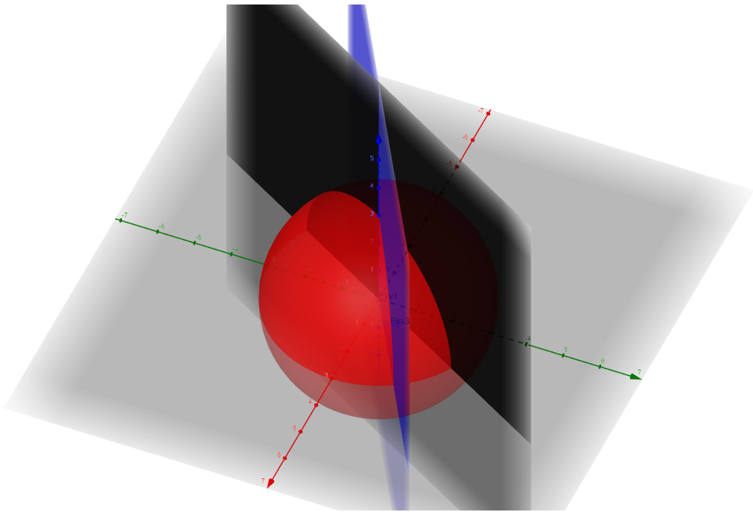
Men om vi går mot oändligheten längs kurvan $y = x^2$ får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x^4 + (x^2 - x^2)^4} = 1.$$

Då dessa är olika existerar inte gränsvärdet.

Svar: Gränsvärdet existerar ej.

6. Området begränsas av klotet med radie 3 och centrum i origo samt de två planen $y = x/\sqrt{3}$ och $y = \sqrt{3}x$. Notera att olikheterna $x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}x$ speciellt innebär att vi har $x \geq 0$.



Eftersom halvplanet $y = x/\sqrt{3}$, $x \geq 0$ ges precis av de punkter sådana att $\varphi = \pi/6$ och halvplanet $y = \sqrt{3}x$, $x \geq 0$ ges precis av de punkter sådana att $\varphi = \pi/3$ ser vi därför att området i polära koordinater ges av $0 \leq r \leq 3$, $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Eftersom området D är symmetriskt m.a.p. z (d.v.s. $(x, y, z) \in D \Leftrightarrow (x, y, -z) \in D$), och funktionen $z \mapsto \sin(z^{17})$ är udda, ser vi att

$$\iiint_D \sin(z^{17})\, dxdydz = 0.$$

Det återstår att beräkna:

$$\begin{aligned}\iiint_D 2x\, dxdydz &= \int_0^\pi \left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\int_0^3 2r\cos\varphi \sin\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr \right) d\varphi \right) d\theta \\ &= 2\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^3 r^3 dr = \cdots = \frac{81(\sqrt{3}-1)\pi}{8}.\end{aligned}$$

Svar: $81(\sqrt{3} - 1)\pi/8$.