Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2020-11-01

1. Ekvationssystemet $\nabla f(x,y) = (3x^2-12x+24+12y, -24y-48+12x) = (0,0)$ ger de stationära punkterna $(0,-2)$ och $(2,-1)$. Från $f''_{xx} = 6x-12$, $f''_{xy} = 12$ och $f''_{yy} = -24$ erhålls $Q_{(0,-2)}(h,k) = -12h^2 + 24hk - 24k^2 = -12(h-k)^2 - 12k^2$ (eller $-24(k-\frac{1}{2}h)^2 - 6h^2$) som är negativt definit, så att $(0,-2)$ är en lokal maximipunkt, samt $Q_{(2,-1)}(h,k) = 24hk - 24k^2 = -24(k-\frac{1}{2}h)^2 + 6h^2$ som är indefinit, så att $(2,-1)$ är en sadelpunkt (alltså ej någon lokal extrempunkt).

   Svar: $(x,y) = (0,-2)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

2. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat, men vi kan använda variabelbyte och upprepad integration som vanligt eftersom integranden $x/(x^2+y^2)^3$ inte växlar tecken på D (den är ≤ 0 hela tiden; för övrigt ser vi också här att svaret måste bli negativt). Polära koordinater ger

$$\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \int_{\rho=\sqrt{3}}^{\infty} \left(\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\rho\cos\varphi}{(\rho^2)^3}\,\rho\,d\varphi \right) d\rho$$
$$= \Big[\sin\varphi\Big]_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} \cdot \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{-1}{3\rho^3}\right]_{\rho=\sqrt{3}}^{\omega} = (-2)\cdot\left(0 - \frac{-1}{3\cdot 3\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9\sqrt{3}}.$$

   Svar: $-\dfrac{2}{9\sqrt{3}}$.

3. (a) Nivåkurvan har såklart ekvationen $f(x,y) = f(3,2)$, dvs. $x^2y - 9x - y^3 = -17$. Från gradienten $\nabla f(x,y) = (2xy-9, x^2-3y^2)$ fås tangentlinjens normalvektor $\nabla f(3,2) = (3,-3) = 3\,(1,-1)$, så tangentlinjens ekvation är $x - y = C$, där insättning av $(x,y) = (3,2)$ ger $C = 1$.

   Svar: Kurvans ekvation är $x^2y - 9x - y^3 = -17$, den sökta tangentlinjens ekvation är $x - y = 1$.

   (b) Låt $g(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2$. Riktningsvektorn för normallinjen till kurvan $g(x,y) = 1$ i den sökta punkten (a,b) ges av gradienten $\nabla g(a,b) = (2a+4b, 4a+10b)$, och denna vektor ska alltså vara parallell med y-axeln, dvs. dess x-komponent ska vara noll. Alltså $2a + 4b = 0$, och dessutom ska punkten ligga på kurvan, dvs. $a^2 + 4ab + 5b^2 = 1$. Detta ekvationssystem har lösningarna $(a,b) = \pm(2,-1)$.

   Svar: $(2,-1)$ och $(-2,1)$.

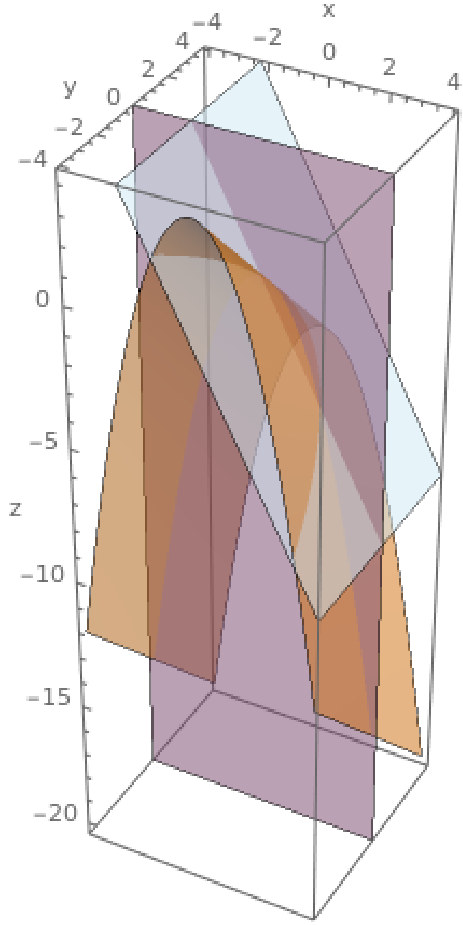
4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u + 2x\, z'_v$ och $z'_y = z'_v$. Ekvationen $z'_x - 2x\, z'_y = 3y$ transformeras därmed till $z'_u = 3(v - u^2)$. Integration med avseende på u ger $z = 3uv - u^3 + f(v) = 3x(x^2+y) - x^3 + f(x^2+y) = 2x^3 + 3xy + f(x^2+y)$, där $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Bivillkoret ger $0 = z(1, y) = 2 + 3y + f(1 + y)$, alltså $f(v) = -2 - 3(v - 1) = 1 - 3v$.

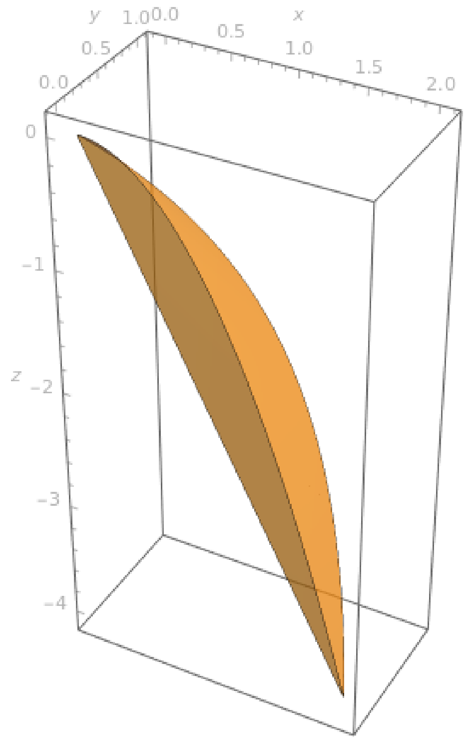
   Svar: $z(x, y) = 2x^3 + 3xy + 1 - 3(x^2 + y)$.

5. (a) Avbildningen är uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$ (t.o.m. av klass $\mathcal{C}^\infty$), med funktionalmatrisen
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 8 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}.$$
   Funktionaldeterminanten i den aktuella punkten är skild från noll:
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d(u,v)}{d(x,y)}(2,-1) = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$
   Enligt inversa funktionssatsen är därmed avbildningen lokalt inverterbar där, vilket skulle visas. Vidare är
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(0,1) = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(2,-1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Svar: Se bevis ovan. Den efterfrågade funktionalmatrisen är $\frac{1}{20}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

   (b) T.ex. avbildas $(x, y) = (2, 0)$ och $(x, y) = (0, 1)$ på samma punkt $(u, v) = (8, 5)$.

6. Det *begränsade* område D som de tre ytorna bestämmer ges av olikheterna $2x + z \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + y + z \leq 0$, vilket kan inses geometriskt (se figurer på nästa sida). Tvärsnittet D_x för fixt $x \in [0, 2]$ är en triangel i yz-planets fjärde kvadrant som avgränsas av linjerna $y = 0$, $z = -2x$ och $y + z = -x^2$, så
$$\iiint_D dxdydz = \int_{x=0}^{2} \left(\iint_{D_x} dydz\right) dx = \int_{x=0}^{2} \text{Area}(D_z)\, dz$$
$$= \int_{x=0}^{2} \frac{\left(-x^2 - (-2x)\right)^2}{2}\, dz.$$
   Alternativ lösning: tvärsnittet D_z för fixt $z \in [-4, 0]$ är det område i xy-planet som ligger ovanför linjen $y = 0$, nedanför parabeln $y = (-z) - x^2$, samt till höger om linjen $x = -z/2$, så
$$\iiint_D dxdydz = \int_{z=-4}^{0} \left(\iint_{D_z} dxdy\right) dz = \int_{z=-4}^{0} \left(\int_{x=-z/2}^{\sqrt{-z}} \left(\int_{y=0}^{-z-x^2} dy\right) dx\right) dz$$
   Svar: $8/15$.


x
y
z
-4
-2
0
2
4
-5
-10
-15
-20


x
y
z
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
-1
-2
-3
-4