Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2021-01-07

1. Parabeln $y = x^2$ skär cirkeln $x^2 + y^2 = 2$ i punkterna $(x, y) = (\pm 1, 1)$, så integralen blir

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{x=-1}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy \right) dx = \int_{x=-1}^{1} \frac{(2-x^2) - x^4}{2}\,dx = \frac{22}{15}.$$

Svar: $22/15$.

2. (a) Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u + 2xyz'_v$ och $z'_y = (1 + x^2)z'_v$, så PDE:n uttryckt i nya variabler blir $z'_u = 1/(1 + u^2)$, med allmän lösning $z = \arctan u + f(v)$.

   Svar: $z(x, y) = \arctan x + f\Big((1 + x^2)y\Big)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

   (b) Det bör vara välbekant att riktningsderivatan är maximal i gradientens riktning, och att dess maximala värde ges av gradientens belopp. I detta fall har vi $\nabla f(x, y) = (2xy - 20, x^2 - 2y)$ och därmed $\nabla f(3, 4) = (4, 1)$, med beloppet $\sqrt{17}$.

   Svar: Det största värdet för riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(3, 4)$ är $\sqrt{17}$, vilket inträffar då $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 1)$.

   (c) T.ex. kan man ta fram tangentplanets ekvation med formeln $z = f(a, b) + f'_x(a, b)\,(x - a) + f'_y(a, b)\,(y - b)$, där $(a, b) = (-1, 2)$ i detta fall. Detta ger $z = -7 + 6(x + 1) + (-12)(y - 2)$.

   Svar: Tangentplanet är $z = 23 + 6x - 12y$.

3. Byte till rymdpolära koordinater ger det nya området $E = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le r \le 2,\ \pi/2 \le \theta \le \pi,\ \pi/4 \le \varphi \le \pi/2\}$, så

$$\begin{aligned}
\iiint_D yz\,dxdydz &= \iiint_E r \sin\theta \sin\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= \left(\int_0^2 r^4 dr \right) \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta\,d\theta \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi \right) \\
&= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} \Big[-\cos\varphi \Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\
&= \frac{32}{5} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{16\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Som en rimlighetskontroll kan man notera att svaret måste bli negativt, eftersom integranden yz bara antar negativa värden i D (förutom att den är noll på delar av randen, vilket inte påverkar integralens värde).

Svar: $-16\sqrt{2}/15$.

4. Den givna ekvationen är ekvivalent med $F = 0$, där $F(x, y, z) = 4xy + y^3 - z\sin(yz)$. Den givna punkten $(-1, 2, \frac{\pi}{2})$ uppfyller denna ekvation, och F är uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$ (t.o.m. klass $\mathcal{C}^\infty$). Vidare är

$$\nabla F(x, y, z) = \Big(4y, 4x + 3y^2 - z^2\cos(yz), -\sin(yz) - yz\cos(yz)\Big),$$
$$\nabla F(-1, 2, \tfrac{\pi}{2}) = \Big(8, -4 + 12 - (-\pi^2/4), 0 - (-\pi)\Big) = (8, 8 + \tfrac{\pi^2}{4}, \pi),$$

och i synnerhet är $F'_y(-1, 2, \frac{\pi}{2}) = 8 + \frac{\pi^2}{4} \neq 0$. Alla tre förutsättningarna för implicita funktionssatsen är därmed uppfyllda, vilket visar att ekvationen $F = 0$ lokalt bestämmer en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x, z)$ nära punkten ifråga. Per definition är $f(-1, \frac{\pi}{2}) = 2$. Derivering av identiteten $0 = F(x, f(x, z), z)$ med avseende på x ger, enligt kedjeregeln,

$$0 = \frac{d}{dx}\Big(F(x, f(x, z), z)\Big) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Obs. att det inte är korrekt notation att skriva} \\ \text{"}F'_x(x, f(x, z), z)\text{" här, för det motsäger ju vad} \\ \text{som kommer på nästa rad.}\end{array}\right)$$
$$= F'_x(x, f(x, z), z) \cdot 1 + F'_y(x, f(x, z), z) \cdot f'_x(x, z) + F'_z(x, f(x, z), z) \cdot 0,$$

alltså $f'_x(x, z) = -F'_x(x, f(x, z), z)/F'_y(x, f(x, z), z)$, och analogt för z-derivatan. Gradienten av f är alltså

$$\nabla f(x, z) = \Big(f'_x(x, z), f'_z(x, z)\Big) = \left(-\frac{F'_x(x, f(x, z), z)}{F'_y(x, f(x, z), z)}, -\frac{F'_z(x, f(x, z), z)}{F'_y(x, f(x, z), z)}\right),$$

och speciellt

$$\nabla f(-1, \tfrac{\pi}{2}) = \left(-\frac{8}{8 + \frac{\pi^2}{4}}, -\frac{\pi}{8 + \frac{\pi^2}{4}}\right).$$

Svar: Se ovan.

5. (a) Det betyder att $f(x, y) > f(a, b)$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$.

   (b) Det betyder att (a, b) har en omgivning M sådan att $f(x, y) > f(a, b)$ för alla $(x, y) \in M \setminus \{(a, b)\}$.

   (c) T.ex. $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^3$. Den vanliga undersökningen med Maclaurinutveckling visar att f har strängt lokalt minimum i origo, eftersom $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ och den kvadratiska formen $Q(x, y) = x^2 + y^2$ är positivt definit. Men detta är inte ett globalt minimum, eftersom t.ex. värdet $f(2, 0) = -4$ är mindre än värdet $f(0, 0) = 0$. (Globalt minimum saknas f.ö. i detta fall, eftersom $f(x, 0) \to -\infty$ då $x \to +\infty$.)

6. Integralen är generaliserad eftersom området D är obegränsat. Integranden växlar dock ej tecken på D (den är ju positiv på hela $\mathbf{R}^2$), vilket medför att vi inte behöver inte dela upp integralen i positiv och negativ del, samt att vi kan använda variabelbyten och upprepade integration "som vanligt". Skriv olikheterna för D som $0 \le 3y - x - 3$ och $0 \le 2x - y - 4 = (x + 2y - 7) - (3y - x - 3)$. I de nya variablerna $u = x + 2y - 7$ och $v = 3y - x - 3$ fås därmed det enklare området $E = \{(u, v) \in R^2 : 0 \le v,\ 0 \le u - v\}$, och integranden blir $e^{-(x+2y-7)^2} = e^{-u^2}$. Vidare har vi $dudv = \left|\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)\right| dxdy = 5\, dxdy$. Alltså:

$$\iint_D e^{-(x+2y-7)^2}\, dxdy = \iint_E e^{-u^2} \frac{dudv}{5} = \frac{1}{5} \int_{u=0}^{\infty} \left(\int_{v=0}^{u} e^{-u^2} dv \right) du$$
$$= \frac{1}{5} \int_{u=0}^{\infty} u\, e^{-u^2} du = \frac{1}{5} \lim_{\omega \to \infty} \left[-\frac{1}{2}\, e^{-u^2} \right]_0^{\omega} = \frac{1}{10}.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värdet 1/10.