Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2021-01-07 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iint_D y\,dxdy$ där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \text{ och } y \geq x^2\}$.

2. (a) Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till PDE:n $(1+x^2)z'_x - 2xy\,z'_y = 1$, t.ex. med hjälp av de nya variablerna $u = x$ och $v = (1+x^2)y$.

   (b) Låt $f(x,y) = x^2y - 20x - y^2$. Beräkna det största möjliga värdet för riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(3,4)$, och ange även för vilken enhetsvektor $\mathbf{v}$ som detta värde antas.

   (c) Bestäm tangentplanet till grafen för $f(x,y) = x^2 + xy^3$ i den punkt på grafen där $x = -1$ och $y = 2$.

3. Beräkna $\iiint_D yz\,dxdydz$, där
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq y,\ z \leq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}.$$

4. Visa att sambandet
$$4xy + y^3 = z\sin(yz)$$
i en omgivning till punkten $(x,y,z) = (-1,2,\frac{\pi}{2})$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x,z)$, samt ange $f(-1,\frac{\pi}{2})$ och $\nabla f(-1,\frac{\pi}{2})$.

5. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har **strängt globalt minimum** i punkten $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

   (b) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ har **strängt lokalt minimum** i punkten $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

   (c) Ge ett exempel på en funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som har strängt lokalt minimum i origo, men inte strängt globalt minimum i origo. (Motivera tydligt.)

6. Beräkna (eller visa divergens):
$$\iint_D e^{-(x+2y-7)^2}\,dxdy$$
där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x/3 + 1 \leq y \leq 2x - 4\}$.