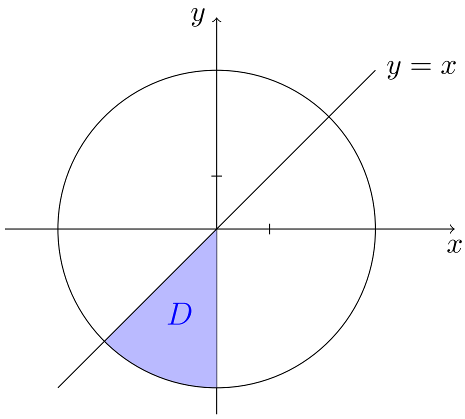
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2021-05-30, 8-13

1. I polära koordinater ges området D av $0 \le \rho \le 3$, $-\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$, så

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_{-3\pi/4}^{-\pi/2} \left(\int_0^3 (\rho\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \right) d\varphi$$
$$= \int_{-3\pi/4}^{-\pi/2} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\,d\varphi \cdot \int_0^3 \rho^2 d\rho = \Big[\sin\varphi - 2\cos\varphi\Big]_{-3\pi/4}^{-\pi/2} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3$$
$$= -\frac{9\sqrt{2}+18}{2}.$$



Svar: $-\dfrac{9\sqrt{2}+18}{2}$.

2. Den första ekvationen $z'_x = 2y^2 \sin(2xy^2)$ medför att $z = -\cos(2xy^2) + h(y)$. Derivation av detta med avseende på y, samt den andra ekvationen, ger nu $z'_y = 4xy\sin(2xy^2) + h'(y) = 4xy\sin(2xy^2) + y$, vilket ger att $h'(y) = y$, som i sin tur medför att $h(y) = y^2/2 + C$. Så $z = -\cos(2xy^2) + y^2/2 + C$.

   Slutligen ger bivillkoret att $z(0,2) = -\cos(0) + 2^2/2 + C = 1 + C = 3$, så att $C = 2$.

   Svar: $z = -\cos(2xy^2) + y^2/2 + 2$.

3. Eftersom $\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ får vi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + 2e^{2x^2+y^2} + 3xy \\ &= 1 + 2(1 + (2x^2+y^2) + \mathcal{O}((2x^2+y^2)^2) + 3xy \\ &= 3 + 4x^2 + 2y^2 + 3xy + \mathcal{O}(|(x,y)|^3), \end{aligned}$$

där vi använt att $\mathcal{O}((2x^2+y^2)^2) = \mathcal{O}(|(x,y)|^4) = \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$.

(Alternativt kan vi räkna fram $f(0,0) = 3$, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, $f''_{xx}(0,0) = 8$, $f''_{xy}(0,0) = 3$, $f''_{yy}(0,0) = 4$, samt använda Taylors formel: $f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}f''_{xx}(0,0)x^2 + f''_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f''_{yy}(0,0)y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$.)

Eftersom det inte finns några förstagradstermer med i utvecklingen ser vi att $\nabla f(0,0) = (0,0)$, så origo är en stationär punkt. Och den kvadratiska formen är positivt definit, vilket syns från omskrivningen

$$4x^2 + 2y^2 + 3xy = 4(x + 3y/8)^2 + 23y^2/16,$$

eller, om man så föredrar,

$$4x^2 + 2y^2 + 3xy = 2(y + 3x/4)^2 + 23x^2/8.$$

Alltså har f ett lokalt minimum i origo.

Svar: $f(x,y) = 3 + 4x^2 + 2y^2 + 3xy + \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$. Origo är ett lokalt minimum.

4. (a) Med $F(x,y,z) = 16\mathrm{e}^{xyz}$, som uppenbart är av klass $\mathcal{C}^1$, gäller $F(-2, \ln 2, 2) = 16\mathrm{e}^{-4\ln 2} = 1$ samt

$$F'_z(x,y,z) = 16xy\mathrm{e}^{xyz},$$
$$F'_z(-2,\ln 2, 2) = -32\mathrm{e}^{-4\ln 2}\ln 2 = -2\ln 2 \neq 0.$$

Enligt implicita funktionssatsen definierar därmed ekvationen $F(x,y,z) = 1$ en funktion $z = f(x,y)$ lokalt kring den givna punkten. (I detta fall går det faktiskt även att lösa ut $f(x,y) = \frac{-\ln 16}{xy}$ explicit!)

(b) Från $\nabla F = (16yz\mathrm{e}^{xyz}, 16xz\mathrm{e}^{xyz}, 16xy\mathrm{e}^{xyz})$ fås

$$\nabla F(-2, \ln 2, 2) = (2\ln 2, -4, -2\ln 2).$$

Tangentplanet till nivåytan ges av

$$\nabla F(-2,\ln 2, 2) \cdot (x+2, y - \ln 2, z - 2) = 0$$
$$\iff \quad (2\ln 2)x - 4y - (2\ln 2)z = -12\ln 2.$$

Svar: $(\ln 2)x - 2y - (\ln 2)z = -6\ln 2$.

(c) Nej, eftersom $16\mathrm{e}^{xyz} = 16$ gäller för alla punkter $(0,1,z)$ oavsett värde på z. (Observera att det inte sägs något om att funktionen f ska vara deriverbar, så det går inte att motivera resultatet med att $F'_z(0,1,1) = 0$.)

Svar: Nej.

5. (a) Med beteckningen

$$f(x,y,z) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

gäller att

$$f(x,0,0) = \frac{x^3}{x^2} \to 0 \text{ då } x \to 0$$

men

$$f(0,y,0) = \frac{y^2}{y^2} = 1 \to 1 \text{ då } y \to 0.$$

Svar: Gränsvärdet existerar inte.

(b) Ett motexempel ges av $f(x,y) = 1/(x^2+y^2)$ och $b(x,y) = |x|$. Det är uppenbart att $f(x,y) \to \infty$ då $(x,y) \to (0,0)$, och vi har också

$$f(x,kx)\,b(x,kx) = \frac{|x|}{(1+k^2)x^2} = \frac{1}{1+k^2} \cdot \frac{1}{|x|} \to \infty \quad \text{då } x \to 0,$$

för varje $k \in \mathbf{R}$. Men $f(x,kx)\,b(x,kx)$ går ändå inte mot ∞ då $(x,y) \to (0,0)$, eftersom $b(0,y)\,f(0,y) = 0/y^2 = 0$ för alla $y \neq 0$.

Svar: Påståendet är falskt.

6. I de nya variablerna

$$\begin{aligned} u &= x + y + 2z, \\ v &= x - y + 2z, \\ w &= x + y - 2z \end{aligned}$$

beskrivs området av olikheterna $1 \le u \le 6$, $v \ge 2$ samt $2 \le w \le 5$. Eftersom området är obegränsat är integralen generaliserad. Vi noterar att integranden är positiv på hela D, så vi kan använda variabelbyte samt Fubinis sats. Vi har att

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8,$$

så

$$\iiint_D \frac{1}{(x-y+2z)^2}\,dxdydz = \int_1^6 \left(\int_2^\infty \left(\int_2^5 \frac{1}{v^2} \left| \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \right| dw \right) dv \right) du$$

$$= \frac{1}{8} \int_1^6 du \cdot \int_2^\infty \frac{1}{v^2}\,dv \cdot \int_2^5 dw = \frac{5 \cdot 3}{8} \cdot \lim_{T \to \infty} \left[\frac{-1}{v} \right]_2^T = \frac{15}{16}.$$

Svar: 15/16.