Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2021-05-30 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.

Svar finns tidigast 2021-05-31 på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iint_D (x+2y)\,dxdy$ där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 9, y \leqslant x \leqslant 0\}$.

2. Lös (eller visa att lösning saknas) följande system av partiella differentialekvationer med bivillkor:

$$\begin{cases} z'_x = 2y^2\sin(2xy^2), \\ z'_y = 4xy\sin(2xy^2) + y, \\ z(0,2) = 3. \end{cases}$$

3. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 i $(0,0)$, d.v.s. med restterm $\mathcal{O}(|(x,y)|^3)$, till $f(x,y) = 1 + 2e^{2x^2+y^2} + 3xy$, samt avgör med hjälp av detta om f har ett lokalt maximum eller minimum (eller ingetdera) i origo.

4. (a) Visa att ekvationen $16e^{xyz} = 1$ lokalt definierar en funktion $z = f(x,y)$ i en omgivning till punkten $(-2, \ln 2, 2)$. (1p)

   (b) Bestäm tangentplanet till nivåytan $16e^{xyz} = 1$ i punkten $(-2, \ln 2, 2)$. (1p)

   (c) Avgör om $16e^{xyz} = 16$ definierar en funktion $z = f(x,y)$ lokalt kring $(x,y,z) = (0,1,1)$. (1p)

5. (a) Undersök $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2+z^2}$. (1p)

   (b) Antag att $f(x,y)$ och $b(x,y)$ är kontinuerliga funktioner på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sådana att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty \text{ och } \lim_{x\to 0} b(x,kx)f(x,kx) = \infty \text{ för alla } k \in \mathbb{R}.$$

   Gäller då att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} b(x,y)f(x,y) = \infty$? (Ge bevis eller motexempel.) (2p)

6. Låt området D i $\mathbb{R}^3$ ges av olikheterna $1 \leqslant x+y+2z \leqslant 6$, $2 \leqslant x-y+2z$, $2 \leqslant x+y-2z \leqslant 5$. Beräkna (eller visa divergens)

$$\iiint_D \frac{1}{(x-y+2z)^2}\,dxdydz.$$