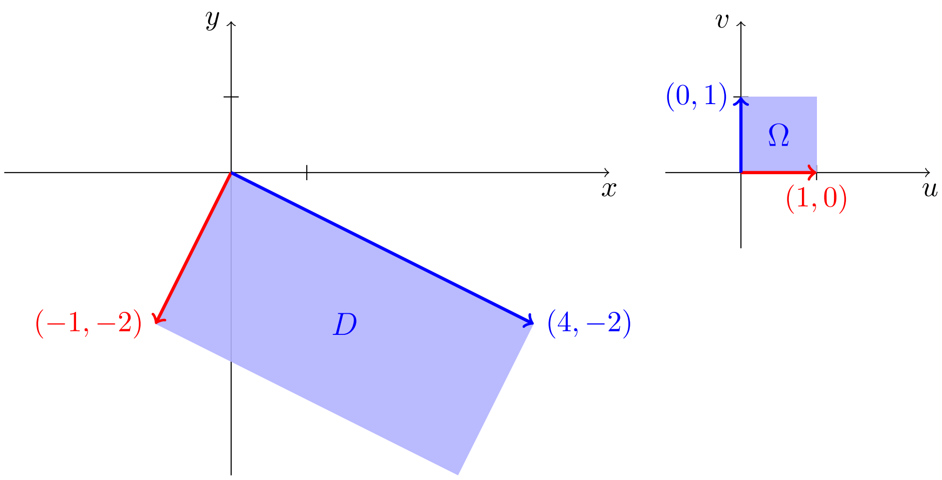
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2021-05-30, 14-19

1. Med det linjära variabelbytet

$$x = -u + 4v,$$
$$y = -2u - 2v,$$

som fås med basbyte till basen $((-1,-2)\ (4,-2))$, avbildas punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$ i uv-planet på $(0,0)$, $(-1,-2)$, $(4,-2)$ resp. $(3,-4)$ i xy-planet, dvs. enhetskvadraten Ω avbildas via denna transformation på vårt område D.



Vidare har vi

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

så

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \big((-u+4v) + (-2u-2v)\big) \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du \right) dv$$
$$= 10 \int_0^1 \left(\int_0^1 (-3u+2v)du \right) dv = 10 \int_0^1 \left[-3u^2/2 + 2uv \right]_{u=0}^1 dv$$
$$= 10 \int_0^1 (-3/2 + 2v)dv = 10 \left[-3v/2 + v^2 \right]_{v=0}^1 = -5.$$

Alternativ uträkning (som möjligen är en aning kvickare): $I = \iint_\Omega u\,dudv$ är lika med $\iint_\Omega v\,dudv$ av symmetriskäl, så $10 \iint_\Omega (-3u+2v)\,dudv = 10\,(-3I + 2I) = -10I = -10 \cdot 1 \cdot [\frac{1}{2}u^2]_0^1 = -5$.

Svar: -5.

2. (a) Eftersom $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$ är origo inte en stationär punkt, och f har därför inget lokalt extremvärde där.

   Svar: Ingetdera.

   (b) Eftersom $\sin t = t + \mathcal{O}(t^3)$, och $e^t = 1 + \mathcal{O}(t)$ får vi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x^2 - 4y^2 + 2\sin(xy) + e^{x^4} \\ &= -x^2 - 4y^2 + 2((xy) + \mathcal{O}((xy)^3)) + (1 + \mathcal{O}(x^4)) \\ &= 1 - x^2 - 4y^2 + 2xy + \mathcal{O}(|(x,y)|^3), \end{aligned}$$

   eftersom både $\mathcal{O}((xy)^3))$ och $\mathcal{O}(x^4)$ är ”bättre” än $\mathcal{O}(|(x,y)|^3)$. (Alternativt kan vi räkna fram $f(0,0) = 1$, $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, $f''_{xx}(0,0) = -2$, $f''_{xy}(0,0) = 2$, $f''_{yy}(0,0) = -8$, och använda Taylors formel: $f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \frac{1}{2}f''_{xx}(0,0)x^2 + f''_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2}f''_{yy}(0,0)y^2 + \mathcal{O}(|(x,y)|^3)$.)

   Eftersom utvecklingen saknar förstagradstermer är $\nabla f(0,0) = (0,0)$, dvs. origo är en stationär punkt. Och den kvadratiska formen

$$-x^2 - 4y^2 + 2xy = -(x-y)^2 - 3y^2$$

   är negativt definit. Alltså har f lokalt maximum i origo.

   Svar: Lokalt maximum.

3. Det föreslagna variabelbytet $u = x$, $v = x^2 y$ ger enligt kedjeregeln

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + 2xy z'_v, \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = x^2 z'_v. \end{aligned}$$

   Insättning i PDE:n ger

$$x z'_x - 2y z'_y = x(z'_u + 2xy z'_v) - 2y(x^2 z'_v) = x z'_u = u z'_u = v,$$

   dvs. $z'_u = v/u$ (observera att $x > 0$ och $y > 0$ medför $u > 0$ och $v > 0$, så det är inget problem att dividera med u). Efter integration med avseende på u fås

$$z = v \ln u + h(v) = x^2 y \ln x + h(x^2 y),$$

   där h är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

   Svar: $z(x,y) = x^2 y \ln x + h(x^2 y)$.

4. Med $F(x,y) = 2y\mathrm{e}^{x^2-4} - \ln(7-xy)$, som uppenbart är av klass $\mathcal{C}^1$, gäller att $F(2,3) = 2\cdot 3\cdot \mathrm{e}^{2^2-4} - \ln(7-2\cdot 3) = 6\cdot \mathrm{e}^0 - \ln 1 = 6$ och

$$F'_y(x,y) = 2\mathrm{e}^{x^2-4} - \frac{-x}{7-xy},$$
$$F'_y(2,3) = 2\mathrm{e}^0 - \frac{-2}{7-6} = 4 \neq 0,$$

så enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen $F(x,y) = 6$ en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x)$ sådan att $f(2) = 3$ och $F(x, f(x)) = 6$ i någon omgivning till $x = 2$. Derivering av denna identitet ger

$$0 = \frac{d}{dx}6 = \frac{d}{dx}F(x,f(x)) = F'_x(x,f(x)) + F'_y(x,f(x))f'(x),$$

och därmed, med $x = 2$ och $f(2) = 3$ insatt,

$$f'(2) = -\frac{F'_x(2,3)}{F'_y(2,3)}.$$

Från $F'_x(x,y) = 4xy\mathrm{e}^{x^2-4} - \frac{-y}{7-xy}$ erhålls $F'_x(2,3) = 4\cdot 2\cdot 3\mathrm{e}^0 - \frac{-3}{7-2\cdot 3} = 27$, så $f'(2) = -27/4$.

Svar: $f(2) = 3$, $f'(2) = -27/4$.

5. (a) Definitionen av partiell derivata ger

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2h^4}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 2h = 0,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{k^3}{2k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Svar: $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 1/2$.

(b) Vi vet att f är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \quad \text{då } (h,k)\to(0,0).$$

Men vänsterledet ges i detta fall av

$$\frac{\dfrac{2h^4+k^3}{h^2+2k^2} - 0 - 0\,h - \dfrac{k}{2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{4h^4 - kh^2}{2(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}},$$

och om vi studerar detta uttryck längs strålen $h = k > 0$ får vi

$$\frac{4k^4 - k^3}{6\sqrt{2}\,k^3} = \frac{4k-1}{6\sqrt{2}} \to \frac{-1}{6\sqrt{2}} \neq 0 \quad \text{då } k \to 0^+.$$

Svar: f är inte differentierbar i origo.

6. Om vi börjar med att göra det linjära variabelbytet $u = x$, $v = 2y$, $w = 3z$ så avbildas området D på det område E i uvw-rummet som ges av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 16$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Integralen är generaliserad i origo, men vi har en positiv integrand så vi kan använda variabelbyten och Fubinis sats. Vi noterar att

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

så ovanstående variabelbyte följt av ett byte till sfäriska koordinater i uvw-rummet ger

$$\begin{aligned}
&\iiint_D \frac{1}{(x^2+4y^2+9z^2)^{5/4}}\,dxdydz \\
&= \iiint_E \frac{1}{(u^2+v^2+w^2)^{5/4}} \left|\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| dudvdw \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^4 \frac{1}{r^{5/2}}\, r^2 \sin\theta\, dr\right) d\theta\right) d\varphi \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{r}}\, dr \\
&= \frac{\pi}{12}\cdot\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[2\sqrt{r}\Big]_{\varepsilon}^{4} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Svar: $2\pi/3$.