Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2021-08-19

1. $f(x,y) = 2x^2+\ln(1+x+y^3)$ ger $\nabla f = (4x+1/(1+x+y^3), 3y^2/(1+x+y^3))$ och $\nabla f(1,-1) = (5,3)$. Med $\overline{v} = (3,-1)$ får vi nu

$$f'_{\overline{v}}(1,-1) = \frac{\nabla f(1,-1)\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(5,3)\cdot(3,-1)}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}.$$

Eftersom $f(1,-1) = 2$ går grafen $z = f(x,y)$ genom punkten $(1,-1,2)$, och tangentplanet ges av

$$z = f(1,-1)+f'_x(1,-1)(x-1)+f'_y(1,-1)(y+1) = 2+5(x-1)+3(y+1).$$

Svar: Riktningsderivata $f'_{\overline{v}}(1,-1) = 12/\sqrt{10}$, tangentplan $z = 5x+3y$.

2. Med $u = x$ och $v = x^2+2y^2$ ger kedjeregeln att

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + 2xz'_v, \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = 4yz'_v, \end{aligned}$$

så differentialekvationens vänsterled blir $2yz'_x - xz'_y = 2y(z'_u + 2xz'_v) - x(4yz'_v) = 2yz'_u$. Detta ger

$$\begin{aligned} 2yz'_x - xz'_y = 8y^3 &\iff 2yz'_u = 8y^3 \iff z'_u = 4y^2 \\ &\iff z'_u = 2(v-u^2) \iff z = 2uv - \tfrac{2}{3}u^3 + h(v). \end{aligned}$$

(Eftersom $y > 0$ enligt förutsättning är det inget problem att dividera bort faktorn $2y$.) Återgång till de gamla variablerna ger den allmänna lösningen

$$z(x,y) = 2x(x^2+2y^2) - \tfrac{2}{3}x^3 + h(x^2+2y^2) = \tfrac{4}{3}x^3 + 4xy^2 + h(x^2+2y^2),$$

där h är en envariabelfunktion av klass $\mathcal{C}^1$. Bivillkoret $z(x,x) = x^3$ ger

$$\tfrac{16}{3}x^3 + h(3x^2) = x^3 \iff h(3x^2) = -\tfrac{13}{3}x^3.$$

Med $t = 3x^2$, där $x > 0$ enligt förutsättning, får vi $x = (t/3)^{1/2}$, så att

$$h(t) = -\frac{13((t/3)^{1/2})^3}{3} = -\frac{13\,t^{3/2}}{9\sqrt{3}}.$$

Svar: $z(x,y) = \dfrac{4x^3}{3} + 4xy^2 - \dfrac{13(x^2+2y^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}}$.

3. (a) Eftersom $\cos t = 1 - t^2/2 + \mathcal{O}(t^4)$ får vi Maclaurinutvecklingen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x+2y) - 2xy \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x+2y)^2 + \mathcal{O}((x+2y)^4) - 2xy \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(x^2 + 8xy + 4y^2) + \mathcal{O}(|(x,y)|^3). \end{aligned}$$

Eftersom förstagradstermer saknas har f en stationär punkt i origo, dvs. $\nabla f(0,0) = (0,0)$, men den kvadratiska formen

$$-\tfrac{1}{2}(x^2 + 8xy + 4y^2) = -\tfrac{1}{2}((x+4y)^2 - 12y^2)$$

är indefinit, så origo är en sadelpunkt, inte en lokal extrempunkt.

Svar: Ingen lokal extrempunkt i origo.

(b) Med

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3 + xy^2}{x^2 + y^2 + 2xy + x^4 + y^4} = \frac{x^3 + y^3 + xy^2}{(x+y)^2 + x^4 + y^4}$$

gäller

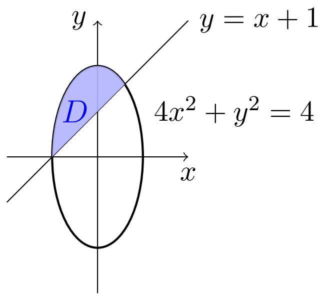
$$f(x,-x) = \frac{x^3}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2x},$$

och vi ser att gränsvärde saknas, eftersom

$$\lim_{x \to 0^+} f(x,-x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x,-x) = -\infty.$$

Svar: Gränsvärdet existerar ej.

4. Ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ skär linjen $y = x + 1$ då $4x^2 + (x+1)^2 = 4$, dvs. då $x = -1$ eller $x = 3/5$, så området D ges av olikheterna $-1 \le x \le 3/5$ och $x + 1 \le y \le 2\sqrt{1 - x^2}$. Integralen blir alltså



$$\begin{aligned} \iint_D x\,dxdy &= \int_{-1}^{3/5} \left(\int_{x+1}^{2\sqrt{1-x^2}} x\,dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{3/5} \Big(2x\sqrt{1-x^2} - x(x+1) \Big) dx \\ &= \left[\frac{-2(1-x^2)^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{3/5} = \cdots = -\frac{32}{75}. \end{aligned}$$

Svar: $-32/75$.

5. De givna ekvationerna är

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= xy + yz + y^3(x-1)^{-2} = 2, \\
G(x, y, z) &= xz + y^2(x-1)^3 = -1,
\end{aligned}
$$

och punkten $(2, 1, -1)$ uppfyller dem. Derivering ger

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y, z) &= y - 2y^3(x-1)^{-3}, & F'_x(2, 1, -1) &= -1, \\
F'_y(x, y, z) &= x + z + 3y^2(x-1)^{-2}, & F'_y(2, 1, -1) &= 4, \\
F'_z(x, y, z) &= y, & F'_z(2, 1, -1) &= 1, \\
G'_x(x, y, z) &= z + 3y^2(x-1)^2, & G'_x(2, 1, -1) &= 2, \\
G'_y(x, y, z) &= 2y(x-1)^3, & G'_y(2, 1, -1) &= 2, \\
G'_z(x, y, z) &= x, & G'_z(2, 1, -1) &= 2.
\end{aligned}
$$

Eftersom funktionerna F och G är av klass $\mathcal{C}^1$ i en omgivning till $(2, 1, -1)$, samt

$$
\begin{vmatrix} F'_x(2, 1, -1) & F'_y(2, 1, -1) \\ G'_x(2, 1, -1) & G'_y(2, 1, -1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,
$$

så säger implicita funktionssatsen att ekvationssystemet definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x = f(z)$ och $y = g(z)$ lokalt kring $(2, 1, -1)$. Per definition gäller $f(-1) = 2$ och $g(-1) = 1$, och implicit derivering ger

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f'(-1) \\ g'(-1) \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} F'_x(2, 1, -1) & F'_y(2, 1, -1) \\ G_x(2, 1, -1) & G'_y(2, 1, -1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F'_z(2, 1, -1) \\ G'_z(2, 1, -1) \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Svar: $f(-1) = 2$, $g(-1) = 1$, $f'(-1) = -3/5$, $g'(-1) = -2/5$.

6. Integralen är generaliserad i origo, och integranden $(x + 2y)/z^4$ växlar tecken på området D, så vi måste dela området/integralen i två delar:

$$
\iiint_D \frac{x + 2y}{z^4}\, dxdydz = \iiint_{D_+} \frac{x + 2y}{z^4}\, dxdydz + \iiint_{D_-} \frac{x + 2y}{z^4}\, dxdydz,
$$

där D_+ består av de punkter i D där $(x + 2y)/z^4 \geq 0$ och D_- av de punkter i D där $(x + 2y)/z^4 \leq 0$. Integralen är per definition konvergent om bägge de två integralerna i högerledet är konvergenta, och således divergent om minst en av dem är divergent.

Vi ska nu visa att den första delintegralen $\iiint_{D_+}(x+2y)z^{-4}\,dxdydz$ är divergent, vilket ger slutsatsen att hela integralen är divergent. Notera att på D_+ är integranden icke-negativ per konstruktion, så där kan vi räkna på med variabelbyten och Fubinis sats som vanligt. Vi har

$$D_+ = \Big\{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2},\ x+2y \ge 0\Big\},$$

vilket är snittet mellan konen $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ som i sfäriska koordinater ges av $0 \le \theta \le \pi/4$, klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ som i sfäriska koordinater ges av $0 \le r \le 1$ och halvrummet $\{(x,y,z) : x+2y \ge 0\}$ som i sfäriska koordinater ges av $\alpha \le \varphi \le \alpha+\pi$, där $\alpha = -\arctan(1/2)$. Alltså får vi

$$\begin{aligned}
&\iiint_{D_+} \frac{x+2y}{z^4}\,dxdydz \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\int_\alpha^{\alpha+\pi}\left(\int_0^1 \frac{r\cos\varphi\sin\theta + 2r\sin\varphi\sin\theta}{(r\cos\theta)^4}\cdot r^2\sin\theta\,dr\right)d\varphi\right)d\theta \\
&= \underbrace{\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta}_{>0}\cdot\underbrace{\int_\alpha^{\alpha+\pi}(\cos\varphi+2\sin\varphi)\,d\varphi}_{>0}\cdot\underbrace{\int_0^1\frac{dr}{r}}_{=\infty} = \infty.
\end{aligned}$$

Notera att i det sista ledet är de två första integralerna strängt positiva, eftersom integranderna är icke-negativa och inte identiskt noll. Och den sista integralen är $\int_0^1 \frac{dr}{r} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln r]_\varepsilon^1 = \infty$.

Svar: Divergent.

Det går att räkna ut de två första integralerna också, även om detta inte är nödvändigt för att dra slutsatsen:

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \left[\frac{\tan^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{3},$$

$$\int_\alpha^{\alpha+\pi}(\cos\varphi+2\sin\varphi)d\varphi = [\sin\varphi - 2\cos\varphi]_\alpha^{\alpha+\pi} = 2\sqrt{5}.$$