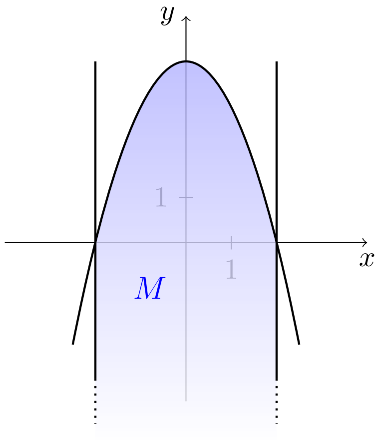
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2021-10-27

1. (a) Mängden M består av de punkter (x, y) som ligger mellan linjerna $x = \pm 2$ och nedanför parabeln $y = 4 - x^2$. Alla M:s randpunkter tillhör M, så M är sluten, och därmed inte öppen (för de enda delmängderna av $\mathbf{R}^2$ som är både öppna och slutna är ju de som saknar randpunkter, alltså $\mathbf{R}^2$ självt och tomma mängden). Det finns punkter i M på godtyckligt stort avstånd från origo, eftersom t.ex. $(0, y) \in M$ för alla $y < 0$, så M är inte begränsad, och därmed inte heller kompakt.

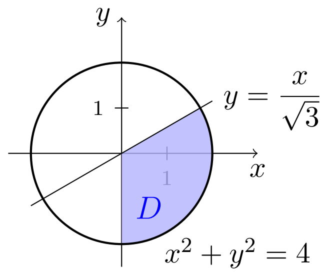


Svar: Figur enligt ovan. Mängden M är sluten, men varken öppen, begränsad eller kompakt.

(b) Ekvationen $f(x, y) = C$ är ekvivalent med att $(x-1)^2 + y^2 = C+1$. För $C = -1$ består nivåmängden alltså enbart av punkten $(1, 0)$, och för $C = 3$ är den en cirkel med radie 2 och centrum i $(1, 0)$.

2. Övergång till polära koordinater (ρ, φ) ger

$$\iint_D (y-1)\,dxdy = \int_{\rho=0}^{2} \left(\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/6} (\rho \sin\varphi - 1)\,\rho\,d\varphi \right) d\rho = \int_{\rho=0}^{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho^2 - \frac{2\pi}{3}\rho \right) d\rho = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4\pi}{3}.$$



Svar: $-\frac{4}{3}(\sqrt{3} + \pi)$.

(Anmärkning: Svaret måste uppenbart bli negativt, eftersom integranden $y - 1$ är negativ för alla $(x, y) \in D$ förutom hörnet $(\sqrt{3}, 1)$.)

3. (a) Mängden ifråga är en nivåmängd

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\right\}$$

till trevariabelfunktionen

$$F(x, y, z) = xy^2 + yz + z^4 + z + 1 - 2x^3.$$

Här i del (a) tar vi för givet att denna nivåmängd är en yta (åtminstone i en omgivning till den givna punkten), eftersom det står så i uppgiften! Vi kan notera att punkten $(2, 3, -1)$ uppfyller ekvationen $F(x, y, z) = 0$, dvs. den ligger verkligen på ytan. Gradienten

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 6x^2, 2xy + z, y + 4z^3 + 1)$$

ger oss en normalvektor till nivåytan i denna punkt:

$$\nabla F(2, 3, -1) = (9 - 24, 12 - 1, 3 - 4 + 1) = (-15, 11, 0).$$

Tangentplanets ekvation blir alltså

$$-15x + 11y + 0z = D,$$

där insättning av $(x, y, z) = (2, 3, -1)$ ger $D = 3$.
Svar: $-15x + 11y = 3$.

(b) Funktionen F är uppenbart av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(2, 3, -1)$ uppfyller ekvationen $F = 0$, och $F'_x(2, 3, -1) = -15 \neq 0$, så enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = g(y, z)$ nära $(2, 3, -1)$, vilket skulle visas. Per definition gäller $g(3, -1) = 2$, och de partiella derivatorna ges av

$$\begin{pmatrix} g'_y(3, -1) \\ g'_z(3, -1) \end{pmatrix} = \frac{-1}{F'_x(2, 3, -1)} \begin{pmatrix} F'_y(2, 3, -1) \\ F'_z(2, 3, -1) \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svar: $g(3, -1) = 2$, $g'_y(3, -1) = 11/15$ och $g'_z(3, -1) = 0$.

4. Tvärsnittet genom kroppen för fixt x är en rektangel

$$D_x = \left\{(y, z) \in \mathbf{R}^2 : y \in [0, 1 - x], z \in [0, 4 - x^2]\right\},$$

under förutsättning att $1 - x \geq 0$ och $4 - x^2 \geq 0$, alltså att $-2 \leq x \leq 1$. Därmed fås

$$\text{Volym}(D) = \iiint_D dxdydy = \int_{-2}^{1} \text{Area}(D_x)\, dx = \int_{-2}^{1} (1-x)(4-x^2)\, dx = \frac{45}{4}.$$

Svar: Volymen är $45/4$.

5. (a) Att f har strängt lokalt minimum i origo betyder (per definition) att punkten $(0,0)$ tillhör f:s definitionsmängd D_f och att det finns ett tal $\delta > 0$ sådant att $f(x,y) > f(0,0)$ för varje $(x,y) \in D_f$ som uppfyller $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

   (Notera att denna definition inte säger någonting om derivator. En funktion kan mycket väl ha lokalt minimum i en punkt där inte derivatorna existerar, som t.ex. funktionen i (c)-uppgiften nedan.)

   (b) Maclaurinutvecklingen för f kan t.ex. beräknas med hjälp av standardutvecklingar från envariabelanalysen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{x+4y} - x\cos(xy) - (2+y)^2 \\ &= 1 + x + 4y + \tfrac{1}{2}(x+4y)^2 + O((x+4y)^3) \\ &\quad - x(1 + O((xy)^2)) - (4 + 4y + y^2) \\ &= -3 + \tfrac{1}{2}\Big((x+4y)^2 - 2y^2\Big) + O(\rho^3), \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

   Eftersom förstagradstermer saknas har f en stationär punkt i origo, men den kvadratiska formen $Q(x,y) = (x+4y)^2 - 2y^2$ är indefinit (t.ex. är ju $Q(1,0) = 1$ positivt och $Q(-4,1) = -2$ negativt), vilken enligt en känd sats medför att denna stationära punkt är en sadelpunkt, inte en lokal minimipunkt.

   Svar: Nej.

   (c) Vi har $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x \geq \sqrt{x^2+0} - \frac{1}{2}x = |x| - \frac{1}{2}x \geq 0$ för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, med likhet i den första uppskattningen om och endast om $y = 0$ och likhet i den andra uppskattningen om och endast om $x = 0$. (Motivering: för $x > 0$ är $|x| - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x > 0$ och för $x < 0$ är $|x| - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}x > 0$.) Alltså $f(x,y) \geq f(0,0) = 0$ överallt, med likhet om och endast om $(x,y) = (0,0)$, så f har t.o.m. ett strängt *globalt* minimum i origo.

   Svar: Ja.

   (De partiella derivatorna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ existerar inte för denna funktion, eftersom funktionen $g_1(x) = f(x,0) = |x| - \frac{1}{2}x$ inte är deriverbar i $x = 0$ och funktionen $g_2(y) = f(0,y) = |y|$ inte är deriverbar i $y = 0$. Uträkningen $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ är bara giltig för $(x,y) \neq (0,0)$; ifall man försöker stoppa in $x = y = 0$ i denna formel får man ju det odefinierade uttrycket $0/0$ på två ställen. Det är alltså **inte** sant att $\nabla f(0,0) = (-\frac{1}{2}, 0)$.)

6. (a) För att f ska vara kontinuerlig i origo måste

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

gälla, dvs. gränsvärdet

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^4 + xy^2}{x^2 + y^4}$$

måste existera och vara lika med funktionsvärdet $f(0,0) = 0$.

Men om tvåvariabelgränsvärdet L existerar kan det inte vara noll, eftersom envariabelgränsvärdet när man närmar sig origo längs kurvan $x = y^2$ inte är noll, utan $1/2$:

$$f(y^2, y) = \frac{y^6 - y^8 + y^4}{2y^4} = \frac{y^2 - y^4 + 1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{då } y \to 0.$$

Så f är diskontinuerlig i origo.

(Tvåvariabelgränsvärdet L existerar för övrigt inte alls, eftersom man får envariabelgränsvärdet noll när man t.ex. närmar sig origo längs någon av koordinataxlarna. Så värdet $f(0,0)$ spelar ingen roll i detta fall; även om $f(0,0)$ hade varit lika med något annat än noll hade f inte blivit kontinuerlig i origo.)

Svar: Nej, f är inte kontinuerlig i origo.

(b) Vi har $f(x,0) = x - x^2$ för alla x (inklusive $x = 0$) och $f(0,y) = 0$ för alla y (inklusive $y = 0$), vilket medför att $f'_x(x,0) = 1 - 2x$ för alla x (speciellt $f'_x(0,0) = 1$) och $f'_y(0,y) = 0$ för alla y (speciellt $f'_y(0,0) = 0$).

Alternativt, använd definitionen direkt:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-h^4}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}(1-h) = 1,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

Svar: Ja, f är partiellt deriverbar i origo, med $f'_x(0,0) = 1$ och $f'_y(0,0) = 0$.

(c) Enligt (a) är funktionen f inte ens kontinuerlig i origo, och då kan den inte heller vara differentierbar där.

Svar: Nej, f är inte differentierbar i origo.