Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2021-10-27 kl. 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Rita en figur som illustrerar mängden

$$M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y \leq 4,\ |x| \leq 2\},$$

och avgör om M är öppen, sluten, begränsad och/eller kompakt. (2p)

(b) Rita (eller beskriv i ord) nivåmängderna $f = -1$ och $f = 3$ för $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2$. (1p)

2. Beräkna $\iint_D (y-1)\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq x/\sqrt{3},\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 2x^3 = xy^2 + yz + z^4 + z + 1\}.$$

i punkten $(2,3,-1)$. (1p)

(b) Motivera att mängden i (a) verkligen är en yta, genom att visa att den i en omgivning till punkten $(x,y,z) = (2,3,-1)$ kan beskrivas som $x = g(y,z)$ där $g \in \mathcal{C}^1$. Ange $g(3,-1)$, $g'_y(3,-1)$ och $g'_z(3,-1)$. (2p)

4. Beräkna volymen av mängden $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 4-x^2\}$.

5. (a) Definiera vad som menas med att $f(x,y)$ har strängt lokalt minimum i origo.

(b) Har $f(x,y) = e^{x+4y} - x\cos(xy) - (2+y)^2$ strängt lokalt minimum i origo?

(c) Har $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x$ strängt lokalt minimum i origo?

6. Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^4 + xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Är f kontinuerlig i origo?

(b) Är f partiellt deriverbar i origo, och vad är i så fall $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$?

(c) Är f differentierbar i origo, och vad är i så fall tangentplanet till dess graf $z = f(x,y)$ i punkten $(0,0,0)$?