Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2022-01-07

1. Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4+4x+2y-2x^2 \\ 4+2y+2x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} (x+y+2)+x(1-x) \\ x+y+2 \end{pmatrix}$$

är lika med nollvektorn om och endast om $x(1-x)=0$ och $x+y+2=0$, dvs. $(x,y)=(0,-2)$ eller $(1,-3)$. Detta är alltså de stationära punkterna, och vi undersöker dem med hjälp av den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q_{(a,b)}(h,k) &= f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f''_{xy}(a,b)\,hk + f''_{yy}(a,b)\,k^2 \\ &= (4-4a)h^2 + 4hk + 2k^2 \end{aligned}$$

från Taylorutvecklingen. Eftersom $Q_{(0,-2)}(h,k) = 4h^2+4hk+2k^2 = 2(k+h)^2+2h^2$ är positivt definit har f (strängt) lokalt minimum i $(0,-2)$, och eftersom $Q_{(1,-3)}(h,k) = 0h^2+4hk+2k^2 = 2(k+h)^2-2h^2$ är indefinit har f varken lokalt minimum eller lokalt maximum i $(1,-3)$ (det är en sadelpunkt).

Svar: Lokalt minimum i $(0,-2)$, ingetdera i $(1,-3)$.

2. (a) Låt $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ för $(x,y)\neq(0,0)$. Då är $f(t,0)=0$ och $f(t,t)=\frac{1}{2}$ för alla $t\neq 0$, så gränsvärdet existerar inte.

(b) Vi har

$$\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1 \to 1 \quad \text{då } h\to 0$$

och

$$\frac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = \frac{k^4/k^2-0}{k} = k \to 0 \quad \text{då } k \to 0,$$

så enligt definitionen av partiell derivata är $g'_x(0,0)=1$ och $g'_y(0,0)=0$.

(c) Nej, g är inte kontinuerlig i $(0,0)$, eftersom

$$g(t+t^2,t) = \frac{(t+t^2)^3+t^4}{(t^2)^2} = \frac{t^3+O(t^4)}{t^4} = \frac{1+O(t)}{t} \to \infty \quad \text{då } t\to 0^+.$$

Svar: (a) Existerar inte. (b) $g'_x(0,0)=1$, $g'_y(0,0)=0$. (c) Nej.

3. Tvärsnittet genom D för fixt $z \in [-2, -1]$ är en cirkelskiva D_z med radie $\sqrt{4-z^2}$, så

$$\iiint_D z\,dxdydz = \int_{-2}^{-1} \left(\iint_{D_z} z\,dxdy \right) dz = \int_{-2}^{-1} z\ \mathrm{Area}(D_z)\,dz$$
$$= \int_{-2}^{-1} z(4-z^2)\,\pi\,dz = \pi \left[-\frac{(4-z^2)^2}{4} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{9\pi}{4}.$$

(Som rimlighetskontroll kan vi notera att svaret uppenbart måste bli negativt, eftersom integranden z ju är negativ i integrationsområdet D.)

Alternativt, använd stavar i z-led, men observera att projektionen av D på xy-planet är en cirkelskiva med radien $\sqrt{3}$, inte 2:

$$\iiint_D z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \left(\int_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-1} z\,dz \right) dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leq 3} \frac{1}{2} \Big(1 - (4-x^2-y^2) \Big)\,dxdy$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} (\rho^2-3)\,\rho\,d\rho = \pi \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{3\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^{\sqrt{3}} = -\frac{9\pi}{4}.$$

Eller använd rymdpolära koordinater, men observera att den undre gränsen för r beror på vinkeln θ, på grund av villkoret $z = r\cos\theta \leq -1$:

$$\iiint_D z\,dxdydz = \int_{\theta=2\pi/3}^{\pi} \left(\int_{r=-1/\cos\theta}^{2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\,d\varphi \right) dr \right) d\theta$$
$$= 2\pi \int_{\theta=2\pi/3}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos\theta \sin\theta \right]_{r=-1/\cos\theta}^{2} d\theta$$
$$= 2\pi \int_{\theta=2\pi/3}^{\pi} \left(4\cos\theta\sin\theta - \frac{\sin\theta}{4\cos^3\theta} \right) d\theta$$
$$= 2\pi \left[2\sin^2\theta - \frac{1}{8\cos^2\theta} \right]_{\theta=2\pi/3}^{\pi}$$
$$= 2\pi \left(\left(0 - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{9\pi}{4}.$$

Svar: $-9\pi/4$.

4. Eftersom $f(5,-1) = 25 - 3 - 10 = 12$ så rör det sig om nivåkurvan $f(x,y) = 12$. Dess tangentlinje i en punkt (a,b) på kurvan har gradienten $\nabla f(a,b)$ som normalvektor (utom om gradienten är nollvektorn, men för just denna funktion f inträffar detta enbart i origo, som inte ligger

på nivåkurvan M eftersom $f(0,0) = 0 \neq 12$, så detta ställer inte till med några bekymmer här). Tangentlinjen är alltså parallell med y-axeln när gradienten är parallell med vektorn $(1,0)$, och de sökta punkterna bestäms därmed av att $f(a,b) = 12$ och $f'_y(a,b) = 0$. Detta ger ekvationerna $a^2 - 3b^2 + 2ab = 12$ och $-6b + 2a = 0$, alltså $a = 3b$ och $(9 - 3 + 6)\, b^2 = 12$, alltså $(a,b) = \pm(3,1)$.

Svar: $(3,1)$ och $(-3,-1)$.

5. (a) Kedjeregeln ger först $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u - 2x z'_v$, och sedan fås med produktregeln och kedjeregeln igen att

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_u)'_x - (2x z'_v)'_x \\ &= (z'_u)'_x - 2z'_v - 2x(z'_v)'_x \\ &= \Big((z'_u)'_u - 2x(z'_u)'_v\Big) - 2z'_v - 2x\Big((z'_v)'_u - 2x(z'_v)'_v\Big) \\ &= z''_{uu} - 4u z''_{uv} + 4u^2 z''_{vv} - 2z'_v. \end{aligned}$$

Svar: $z''_{xx} = z''_{uu} - 4u z''_{uv} + 4u^2 z''_{vv} - 2z'_v$.

(b) Å ena sidan ger $z(x,y) = x^2(y - x^2) = x^2 y - x^4$ att $z''_{xx} = 2y - 12x^2$. Å andra sidan ger $z(u,v) = u^2 v$ insatt i svaret från (a) att

$$z''_{xx} = z''_{uu} - 4u z''_{uv} + 4u^2 z''_{vv} - 2z'_v = 2v - 4u \cdot 2u + 4u^2 \cdot 0 - 2u^2 = 2v - 10u^2$$

vilket i de ursprungliga variablerna är lika med $2(y - x^2) - 10x^2 = 2y - 12x^2$. De två sätten att räkna ut z''_{xx} ger alltså samma resultat, vilket skulle visas.

6. Svårigheten i denna uppgift är att hitta ett variabelbyte som både förenklar integrationsområdet och gör det möjligt att hantera uträkningen av primitiv funktion. Triangeln D kan beskrivas med olikheterna

$$0 \leq 2x - y \leq x + 2y \leq 5,$$

så i de nya variablerna $u = x + 2y$ och $v = 2x - y$ fås en enklare triangel E som ges av

$$0 \leq v \leq u \leq 5.$$

Funktionaldeterminanten $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right| = -5$ ger $dxdy = \frac{1}{5}\, dudv$, så integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{1 + (x+2y)^4} &= \frac{1}{5} \iint_E \frac{dudv}{1 + u^4} = \frac{1}{5} \int_{u=0}^{5} \left(\int_{v=0}^{u} \frac{dv}{1 + u^4} \right) du \\ &= \frac{1}{5} \int_{u=0}^{5} \frac{u\, du}{1 + u^4} = \frac{1}{10} \Big[\arctan(u^2) \Big]_0^5 = \frac{\arctan 25}{10}. \end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{10} \arctan 25$.