Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2022-01-07 kl. 8.00–13.00

Skriv- och ritverktyg (som linjal, passare, gradskiva utan formler) får naturligtvis användas. Andra hjälpmedel är inte tillåtna. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. Bestäm alla stationära punkter för
$$f(x,y) = 4x + 4y + 2x^2 + y^2 + 2xy - \frac{2x^3}{3}$$
och undersök deras karaktär (lokalt maximum, lokalt mimimum, eller ingetdera).

2. (a) Undersök gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   (b) Låt
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{(x-y)^2}, & \text{om } x \neq y, \\ 0, & \text{om } x = y. \end{cases}$$
   Undersök de partiella derivatorna $g'_x(0,0)$ och $g'_y(0,0)$.

   (c) Avgör om funktionen g från (b)-uppgiften är kontinuerlig i punkten $(0,0)$.

3. Låt D ges av olikheterna $z \leq -1$ och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. Beräkna
$$\iiint_D z\, dxdydz.$$

4. Låt M vara den nivåmängd till funktionen $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 2xy$ som innehåller punkten $(x,y) = (5,-1)$. Bestäm alla punkter där mängden M har en tangentlinje som är parallell med y-axeln.

5. (a) Antag att $z(x,y)$ är av klass C^2. Uttryck den partiella andraderivatan z''_{xx} i de nya variablerna $(u,v) = (x, y - x^2)$. (2p)

   (b) Verifiera att ditt svar i (a)-uppgiften stämmer i specialfallet
$$z = u^2 v = x^2(y - x^2),$$
   dvs. att det som du får när du sätter in $z(u,v) = u^2 v$ i ditt framräknade uttryck överensstämmer med vad du får när du beräknar z''_{xx} direkt från $z(x,y) = x^2(y-x^2)$. (1p)

6. Låt D vara triangeln med hörn i punkterna $(x,y) = (0,0)$, $(1,2)$ och $(3,1)$. Beräkna
$$\iint_D \frac{dxdy}{1 + (x+2y)^4}.$$