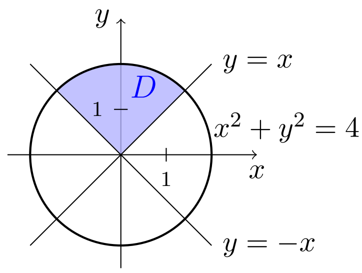
Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2022-06-02

1. Övergång till polära koordinater (ρ, φ) ger

$$\iint_D (2+3y)\,dxdy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^2 (2+3\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \right) d\varphi$$
$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\rho^2 + \rho^3 \sin\varphi\right]_{\rho=0}^{2} d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (4+8\sin\varphi)d\varphi$$
$$= [4\varphi - 8\cos\varphi]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 2\pi + 8\sqrt{2}.$$



Svar: $2\pi + 8\sqrt{2}$

2. (a) Eftersom $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$ är $(0,0)$ ej en lokal extrempunkt.

   (b) I detta fall är gradienten $\nabla f(0,0) = (0,0)$ då det inte finns några förstagradstermer i uttrycket, så origo är en kritisk punkt till f. Men eftersom den kvadratiska formen

$$4x^2 + 8xy + 2y^2 = 4(x+y)^2 - 2y^2$$

   är indefinit är det ingen lokal extrempunkt (det är en sadelpunkt).

   (c) Om vi tittar på $f(x,0) = 4 + x^3$ ser vi att uttrycket är mindre än $f(0,0) = 4$ om $x < 0$ och större om $x > 0$, så det är ingen lokal extrempunkt.

Svar: Funktionen har inte ett lokalt extremvärde i origo i något av fallen.

3. Rättelse: Det var ett fel i formuleringen på tentan. Det borde stått ”en lösning” och inte ”den lösning” då lösningen inte blir entydig under de förutsättningar som är givna. (Se anmärkningen nedan.)

Med $u = x^2 - 2y^2, \quad v = x$ får vi

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2xz'_u + z'_v$$
$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -4yz'_u.$$

Alltså får vi

$$2yz'_x + xz'_y = 2y(2xz'_u + z'_v) + x(-4yz'_u) = 2yz'_v = 2x^2y - 4y^3,$$

vilket ger (eftersom $y > 0$)

$$z'_v = x^2 - 2y^2 = u.$$

Integration med avseende på v ger nu

$$z = uv + h(u) = (x^2 - 2y^2)x + h(x^2 - 2y^2).$$

Bivillkoret ger nu att

$$z(x,1) = (x^2-2)x + h(x^2-2) = x^3 - 2x + h(x^2-2) = -2x + x^3 + x^4,$$

dvs.

$$h(x^2-2) = x^4.$$

Med $t = x^2 - 2$ får vi $x^4 = (t+2)^2$, så t.ex. ger $h(t) = (t+2)^2$ en lösning. Med detta insatt i uttrycket för z ovan får vi alltså

$$z = (x^2 - 2y^2)x + (x^2 - 2y^2 + 2)^2.$$

(Anmärkning: Notera att $h(x^2-2) = x^4$ bara bestämmer h entydigt för de värden på $t = x^2 - 2$ som t kan anta, dvs. $t \geq -2$. Man skulle därför kunna välja att definiera h på annat sätt för $t < -2$ om detta görs så att funktionen fortfarande är $\mathcal{C}^1$. Men man får full poäng för vilken korrekt lösning man än presenterar, t.ex. den i svaret nedan, även om man inte påpekar att lösningen inte är entydig.)

Svar: $z = (x^2 - 2y^2)x + (x^2 - 2y^2 + 2)^2$.

4. Låt $F(x,y) = x\cos x + y^2 + \sin(xy)$, som vi ser är av klass $\mathcal{C}^1$ (t.o.m. $\mathcal{C}^\infty$). Eftersom

$$F(\pi/2, 1) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) + 1^2 + \sin((\pi/2)\cdot 1) = 0 + 1 + 1 = 2$$

så ligger punkten $(\pi/2, 1)$ på nivåmängden $F(x,y) = 2$. Vi har nu vidare att

$$\nabla F = (F'_x, F'_y) = (\cos x - x\sin x + y\cos(xy), 2y + x\cos(xy)),$$

$$\nabla F(\pi/2, 1) = (-\pi/2, 2).$$

Eftersom vi har $F'_y(\pi/2, 1) = 2 \neq 0$ så säger implicita funktionssatsen att ekvationen lokalt definierar $y = f(x)$ av klass $\mathcal{C}^1$, som per definition nu uppfyller $f(\pi/2) = 1$. Vidare gäller

$$f'(\pi/2) = \frac{-F'_x(\pi/2,1)}{F'_y(\pi/2,1)} = \frac{-(-\pi/2)}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(Alternativt kan vi derivera ekvationen

$$F(x, f(x)) = x\cos x + f(x)^2 + \sin(xf(x)) = 2$$

med avseende på x på båda sidor vilket ger

$$\cos x - x\sin x + 2f(x)f'(x) + (f(x) + xf'(x))\cos(xf(x)) = 0.$$

Med $x = \pi/2$ och $f(\pi/2) = 1$ insatt ger detta

$$-\pi/2 + 2f'(\pi/2) = 0,$$

dvs.

$$f'(\pi/2) = \pi/4.)$$

Svar: $f(\pi/2) = 1$, $f'(\pi/2) = \pi/4$.

5. (a) Vi har

$$\frac{x^2 + 2x^2y^2 + y^2}{3x^2 + 3y^2} = \frac{1}{3} + \frac{2x^2y^2}{3x^2 + 3y^2} \to \frac{1}{3} + 0 \text{ då } (x, y) \to (0, 0),$$

eftersom

$$\frac{2x^2y^2}{3x^2 + 3y^2} = \frac{2\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{3\rho^2} = \frac{2}{3}\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

vilket är en produkt av en ρ-beroende faktor $2\rho^2/3$ som går mot noll då ρ går mot noll, och en begränsad faktor ($|\cos^2\varphi\sin^2\varphi| \leq 1$ för alla φ så $\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ är begränsad).

(b) Med $f(x, y) = (x^3y + y^6)/(x^4 + y^4)$ får vi att

$$f(0, y) = \frac{y^6}{y^4} = y^2 \to 0 \text{ då } y \to 0,$$

och

$$f(x, x) = \frac{x^4 + x^6}{2x^4} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0.$$

Eftersom vi får olika värden för dessa olika vägar in mot origo existerar inte gränsvärdet.

(c) Med

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 - 2xz^2 + z^4} = \frac{xyz}{(x - z^2)^2 + y^2}$$

får vi att

$$f(0,0,z) = \frac{0}{z^4} = 0 \to 0 \text{ då } z \to 0,$$

men längs kurvan $(x,y,z) = (t^2+t^3, t^3, t)$ får vi

$$f(t^2+t^3, t^3, t) = \frac{(t^2+t^3)\cdot t^3 \cdot t}{t^6+t^6} = \frac{t^6+t^7}{2t^6} = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \to \frac{1}{2} \text{ då } t \to 0.$$

Eftersom vi får olika värden för dessa olika vägar in mot origo existerar inte gränsvärdet.

Svar: (a) 1/3, (b) existerar ej, (c) existerar ej.

6. Vi börjar med att notera att integranden är positiv och begränsad på integrationsområdet D, så integralen är generaliserad endast på grund av att D är obegränsat.

   Vi ser vidare att om vi låter Ω vara den mängd i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna $x \geq 1, y \leq x \leq 2y$ så har vi

$$\iiint_D \frac{\sin(1/x)}{y^3 z^2}\, dxdydz = \iint_\Omega \frac{\sin(1/x)}{y^3}\, dxdy \cdot \int_2^\infty \frac{1}{z^2} dz.$$

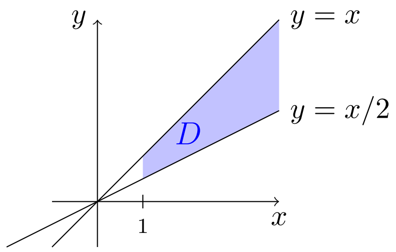
   Vi har

$$\int_2^\infty \frac{1}{z^2} dz = \lim_{T\to\infty} [-1/z]_2^T = \frac{1}{2},$$

   så det återstår bara att undersöka den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_\Omega \frac{\sin(1/x)}{y^3}\, dxdy.$$

   Vi skriver om området som $\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x < \infty, x/2 \leq y \leq x\}$:



   Så

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \frac{\sin(1/x)}{y^3}\, dxdy &= \int_1^\infty \left(\int_{x/2}^x \frac{\sin(1/x)}{y^3}\, dy \right) dx \\ &= \int_1^\infty \left[\frac{-\sin(1/x)}{2y^2} \right]_{y=x/2}^x dx = 3 \int_1^\infty \frac{\sin(1/x)}{2x^2}\, dx \\ &= \lim_{T\to\infty} 3 \left[\frac{\cos(1/x)}{2} \right]_1^T = \frac{3}{2}(\cos 0 - \cos 1) = \frac{3}{2}(1 - \cos 1).\end{aligned}$$

Så trippelintegralen är konvergent och vi får

$$\iiint_D \frac{\sin(1/x)}{y^3 z^2}\, dxdydz = \iint_\Omega \frac{\sin(1/x)}{y^3}\, dxdy \cdot \int_2^\infty \frac{1}{z^2} dz = \frac{3}{2}(1-\cos 1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Svar: Integralen är konvergent med värde $3(1-\cos 1)/4$.