Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2022-08-18

1. Vi har $f(x,y,z) = xy + \mathrm{e}^{xz}$ vilket ger

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (y + z\mathrm{e}^{xz}, x, x\mathrm{e}^{xz}),$$

och

$$\nabla f(1,2,0) = (2,1,1).$$

Alltså får vi med $\overline{v} = (4,0,3)$

$$f'_{\overline{v}}(1,2,0) = \frac{\nabla f(1,2,0)\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(2,1,1)\cdot(4,0,3)}{\sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{11}{5}.$$

Vi noterar att $f(1,2,0) = 3$, så $(1,2,0)$ ligger på nivåytan $f = 3$, och vi vet att gradienten pekar i normalriktningen till tangentplanet i denna punkt, vilket ger

$$(2,1,1)\cdot((x,y,z)-(1,2,0)) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 4.$$

Svar: Riktningsderivata $f'_{\overline{v}} = 11/5$, planets ekvation $2x + y + z = 4$.

2. (a)

$$z''_{xy} = x+2y \Leftrightarrow z'_x = xy+y^2+h(x) \Leftrightarrow z = \frac{x^2y}{2}+xy^2+H(x)+K(y).$$

Svar: $z = x^2y/2 + xy^2 + H(x) + K(y)$ där H och K är godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

(b)

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2y + y^3, \\ z'_y = x^3 + xy, \\ z(0,0) = 3. \end{cases}$$

Den första ekvationen ger

$$z'_x = 3x^2y + y^3 \Rightarrow z = x^3y + xy^3 + h(y) \Rightarrow z'_y = x^3 + 3xy^2 + h'(y).$$

Jämför vi det sista uttrycket med den andra ekvationen får vi

$$z'_y = x^3 + 3xy^2 + h'(y) = x^3 + xy \Leftrightarrow h'(y) = xy - 3xy^2.$$

Detta går dock inte ihop eftersom VL bara kan bero på y medan HL uppenbarligen beror på både x och y. Alltså saknas lösning.
Svar: Lösning saknas.

3. Om vi använder

$$\underline{f} = (\overline{f}_1 \quad \overline{f}_2) = ((1,-1) \quad (2,1)) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

som ny bas, dvs. inför nya koordinater (u, v) sådana att

$$\begin{cases} x = u + 2v \\ y = -u + v, \end{cases}$$

så avbildas området D i xy-planet på området Ω i de nya koordinaterna som ges av $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$. Vidare har vi

$$dxdy = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| dudv = 3dudv.$$

Så

$$\begin{aligned} &\iint_D (x+y)(x-2y)\, dxdy = \iint_\Omega 3v \cdot 3u \cdot 3dudv \\ &= 27\int_0^1 \left(\int_0^1 uv\, dv\right) du = 27\left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^1 \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^1 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Svar: 27/4.

4. Vi börjar med att hitta de stationära (=kritiska) punkterna till $f(x,y) = 7y + 4x^2 + y^2 + 2xy - y^3/48$ som är de punkter (x, y) som löser

$$\nabla f = (f'_x, f'_y) = (8x + 2y, 7 + 2y + 2x - y^2/16) = (0,0).$$

Den första koordinaten ger $8x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$. Detta insatt i den andra ger ekvationen $7 - 8x + 2x - 16x^2/16 = 7 - 6x - x^2 = 0$, som har lösningarna $x = 1$ och $x = -7$. Detta ger de stationära punkterna $(1, -4)$ respektive $(-7, 28)$.

Vidare har vi

$$f''_{xx} = 8, \quad f''_{xy} = 2, \quad f''_{yy} = 2 - y/8.$$

I punkten $(1, -4)$ ger detta den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q_{(1,-4)}(h,k) &= f''_{xx}(1,-4)h^2 + 2f''_{xy}(1,-4)hk + f''_{yy}(1,-4)k^2 \\ &= 8h^2 + 4hk + \frac{5}{2}k^2 = 8(h + k/4)^2 + 2k^2. \end{aligned}$$

Då denna är positivt definit (dvs. $Q_{(1,-4)}(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$) så är $(1,-4)$ ett lokalt minimum till f.

I punkten $(-7,28)$ ger detta den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q_{(-7,28)}(h,k) &= f''_{xx}(-7,28)h^2 + 2f''_{xy}(-7,28)hk + f''_{yy}(-7,28)k^2 \\ &= 8h^2 + 4hk - \frac{3}{2}k^2 = 8(h + k/4)^2 - 2k^2. \end{aligned}$$

Då denna är indefinit (dvs. positiv för vissa (h,k) och negativ för vissa), så är $(-7,28)$ ingen lokal extrempunkt (det är en sadelpunkt).

Svar: Stationära punkter i $(1,-4)$ och $(-7,28)$. Enda lokala extrempunkten är ett lokalt minimum i $(1,-4)$.

5. (a) Integralen är generaliserad på grund av att integranden är obegränsad på integrationsområdet D. Vi noterar att integranden växlar tecken. Om vi låter K vara det delområde till D där integranden $1/z^3$ är positiv, dvs. K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0, z > 0$, så har vi i sfäriska (=rymdpolära) koordinater att

$$\begin{aligned} \iiint_K \frac{1}{z^3}\, dz &= \int_0^3 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^3 \cos^3\theta} r^2 \sin\theta\, d\theta \right) d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^3 \frac{1}{r}\, dr \cdot \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\int_0^3 \frac{1}{r}\, dr = \infty, \qquad \int_0^\pi d\varphi = \pi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = \lim_{t\to(\pi/2)^-} [1/(2\cos^2\theta)]_0^t = \infty$$

så ser vi att integralen över K är divergent, och därmed är den även det över det större området D.

Svar: Divergent.

(b) Integralen är generaliserad på grund av att integranden är obegränsad på integrationsområdet, men den är positiv på hela D. Vi skriver D på formen $(x,z) \in \widetilde{D}$, $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ där $\widetilde{D}$ är projektionen av D på xz-planet som ges av $x^2 + z^2 \leq 9$. Vi får då

(med införandet av polära koordinater i xz-planet)

$$\iiint_D \frac{2y}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dxdydz = \iint_{\widetilde{D}} \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2-z^2}} \frac{2y}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dy \right) dxdz$$
$$= \iint_{\widetilde{D}} \frac{9-x^2-z^2}{\sqrt{x^2+z^2}} dxdz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \frac{9-\rho^2}{\rho} \rho\, d\rho \right) d\varphi$$
$$= 2\pi \left[9\rho - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = 36\pi.$$

Svar: 36π.

6. Vi noterar att

$$f(x,y) = \frac{x^2-2y^4}{(x^2+y^2)(\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1)}$$

är definierad för alla (x,y) sådana att

$$(x^2+y^2)(\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1) \neq 0.$$

Eftersom $x^2+y^2=0$ endast gäller då $x=y=0$ och $\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1=0$ gäller då $x^2-2y^4=0$, som består av de två kurvorna $x=\pm\sqrt{2}y^2$ som går genom origo, så ser vi att

$$D_f = \{(x,y) : x^2-2y^4 \neq 0\}.$$

När det gäller V_f noterar vi först att t och e^t-1 alltid har samma tecken, och vidare om $f(x,y)=0$ måste $x^2-2y^4=0$ som inte ligger i D_f. Alltså (eftersom $x^2+y^2>0$ på D_f) får vi att $f(x,y)>0$ för alla $(x,y)\in D_f$. Men om vi nu tittar på $x>0, y=0$ får vi

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2(\mathrm{e}^{x^2}-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}.$$

Eftersom vi nu ser att

$$f(x,0)\to 0 \text{ då } x\to\infty \text{ och } f(x,0)\to\infty \text{ då } x\to 0^+$$

så får vi att

$$V_f =]0,\infty[.$$

För att bestämma mängden D noterar vi först att för alla (a,b) sådana att $a^2-2b^4=0$ gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-2y^4}{\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = 1.$$

Vidare gäller

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{1}{x^2+y^2} = \begin{cases} 1/(a^2+b^2) & \text{om } (a,b) \neq (0,0) \\ \infty & \text{om } (a,b) = (0,0). \end{cases}$$

Alltså ser vi att

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\},$$

eftersom vi för alla $(a,b) \neq (0,0)$ har

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-2y^4}{(x^2+y^2)(\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-2y^4}{(\mathrm{e}^{x^2-2y^4}-1)} = \frac{1}{a^2+b^2},$$

men det går mot oändligheten om $(a,b) = (0,0)$.

Så funktionen g ges av

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{om } x^2-2y^4 \neq 0 \\ 1/(x^2+y^2) & \text{om } x^2-2y^4 = 0, (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Svar: $D_f = \{(x,y) : x^2-2y^4 \neq 0\}$, $V_f =]0,\infty[$ och $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.