Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2022-10-27

1. (a) Eftersom $|x-y| \geq 0$ och $y^4 \geq 0$ för alla (x,y), så är $f(x,y) \geq f(0,0) = 17$ för alla (x,y), så f har lokalt (och t.o.m. globalt) minimum i origo.

   (b) Eftersom $x = O(\rho)$ och $y = O(\rho)$, där $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, så ger standardutvecklingarna $e^t = 1+t+O(t^2)$ och $\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+O(t^4)$ att

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{xy} + 4\cos(x-2y) \\ &= 1 + xy + O\Big((xy)^2\Big) + 4\Big(1 - \tfrac{1}{2}(x-2y)^2 + O\Big((x-2y)^4\Big)\Big) \\ &= 5 - 2x^2 + 9xy - 8y^2 + O(\rho^4). \end{aligned}$$

   Origo är en stationär punkt eftersom koefficienterna för förstagradstermerna i Maclaurinutvecklingen är noll, men den kvadratiska formen $Q(x,y) = -2x^2 + 9xy - 8y^2 = -2(x - \frac{9}{4}y)^2 + \frac{17}{8}y^2$ är indefinit, så f har inget lokalt maximum eller minimum där.

   (c) Från $f(x,y) = (y-x-x^2)^2 + y^5$ fås

$$f(t, t+t^2) = 0^2 + (t+t^2)^5 = t^5 + O(t^6) = t^5\Big(1 + O(t)\Big),$$

   vilket har samma tecken som t^5 i en omgivning till $t=0$. Godtyckligt nära origo finns alltså såväl punkter där $f(x,y) > f(0,0) = 0$ som punkter där $f(x,y) < f(0,0) = 0$. Därmed har f inte något lokalt maximum eller minimum i origo.

   Svar: Se ovan.

2. I polära koordinater fås (med hjälp av en figur) ett nytt område $E = \{(\rho,\varphi) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2,\ -\pi \leq \varphi \leq -\pi/3\}$ och

$$\begin{aligned} \iint_D (y-1)\,dxdy &= \iint_D y\,dxdy - \text{Area}(D) \\ &= \iint_E \rho^2 \sin\varphi\,d\rho d\varphi - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2 \\ &= \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{-\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi\right) - \frac{4\pi}{3} \\ &= \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{4\pi}{3} = -4 - \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

   Svar: $-4\left(1 + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. Den givna punkten uppfyller ekvationen, och funktionen F är uppenbart av klass C^1. Vidare har vi $\nabla F(x,y,z) = (-4(z-x)^3, 2z, 2y+4(z-x)^3)$ så att $\nabla F(3,4,5) = (-32,10,40)$, där z-komponenten är nollskild. Förutsättningarna för implicita funktionssatsen är alltså uppfyllda, och den visar det som skulle visas. Per definition är $f(3,4) = 5$, och implicit derivering ger att gradienten är

$$\nabla f(3,4) = \frac{-1}{F_z'(3,4,5)}\Big(F_x'(3,4,5), F_y'(3,4,5)\Big) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}\right).$$

Svar: Se ovan.

4. (a) För $t \neq 0$ är $f(t,-t) = t \cdot (-t) \cdot 2t/(t^4 + t^4) = -1/t$, vilket går mot $-\infty$ då $t \to 0^+$. Det är alltså falskt att $f(x,y) \to f(0,0)$ då $(x,y) \to (0,0)$.

   Svar: Nej, f är inte kontinuerlig i origo.

   (b) Kedjeregeln ger $z_x' = z_u' - 2xz_v'$ och $z_y' = z_v'$, så i nya variabler blir PDE:n $z_u' = (v + u^2) + 2u^2$, med lösningen $z = uv + u^3 + g(v) = xy + g(y - x^2)$.

   Svar: $z(x,y) = xy + g(y - x^2)$, där $g \in C^1(\mathbf{R})$ är godtycklig.

   (c) $f(x,y,z) = x^3y + 10x + z^2$ ger $\nabla f(x,y,z) = (3x^2y + 10, x^3, 2z)$, och alltså $\nabla f(2,-1,3) = (-2,8,6)$. Riktningsderivatan är som störst i gradientens riktning, så normering av denna vektor ger den sökta enhetsvektorn.

   Svar: $\mathbf{v} = (-1,4,3)/\sqrt{26}$.

5. Låt $f(x,y,z) = x^2y + xz + y - z^2$. Den sökta punkten $P = (a,b,c)$ ska uppfylla $f(a,b,c) = 1$, $f_z'(a,b,c) = 0$ och $a + b - c = 1$. Den andra ekvationen ger $a = 2c$, vilket insatt i den första ger $4c^2b + 2c^2 + b - c^2 = 1$, så att $b = (1 - c^2)/(1 + 4c^2)$. Insättning i den sista ekvationen ger $2c + (1 - c^2)/(1 + 4c^2) - c = 1$, dvs. $4c^3 - 5c^2 + c = 0$, med lösningarna $c = 0$, $c = 1$ och $c = 1/4$.

   Svar: $(0,1,0)$, $(2,0,1)$ och $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

6. Volymen av D ges av integralen $\iiint_D dxdydz$, som är generaliserad eftersom kroppen D är obegränsad (t.ex. gäller $(x, y, z) = (t, 1, \frac{1}{\sqrt{t}} - 2) \in D$ för $0 < t < \frac{1}{4}$). Men integranden är ju helt enkelt 1, och alltså uppenbart positiv, så vi kan räkna på som vanligt. Projektionen av D på xy-planet är $E = \{(x, y) : 0 < x, 0 < y < 2 - x, 0 < \frac{y}{\sqrt{x}} - 1\}$, alltså $E = \{(x, y) : 0 < x < 1, \sqrt{x} < y < 2 - x\}$, så vi får med stavar i z-led att

$$\begin{aligned}
\iiint_D dxdydz &= \iint_E \left(\int_0^{y/\sqrt{x}-1} dz \right) dxdy \\
&= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=\sqrt{x}}^{2-x} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} - 1 \right) dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^1 \left[\frac{y^2}{2\sqrt{x}} - y \right]_{y=\sqrt{x}}^{2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(2-x)^2}{2\sqrt{x}} - (2-x) - \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} \right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(2x^{-1/2} - \tfrac{3}{2} x^{1/2} + \tfrac{1}{2} x^{3/2} - 2 + x \right) dx \\
&= 4 - 1 + \tfrac{1}{5} - 2 + \tfrac{1}{2} = 17/10.
\end{aligned}$$

Svar: 17/10.