Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2022-10-27 kl. 8.00–13.00

Skriv- och ritverktyg (som linjal, passare, gradskiva utan formler) får naturligtvis användas. Andra hjälpmedel är inte tillåtna. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. Avgör om nedanstående funktioner har lokalt maximum eller lokalt minimum eller ingetdera i punkten $(0,0)$. Motivera tydligt!

   (a) $f(x,y) = |x-y| + y^4 + 17$

   (b) $f(x,y) = e^{xy} + 4\cos(x-2y)$

   (c) $f(x,y) = (y-x-x^2)^2 + y^5$

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D (y-1)\,dxdy$, där

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \le 4,\ y \le 0,\ \sqrt{3}\,x + y \le 0\right\}.$$

3. Låt $F(x,y,z) = 2yz + (z-x)^4$. Visa att ekvationen $F(x,y,z) = 56$ implicit definierar en C^1-funktion $z = f(x,y)$ i någon omgivning till punkten $(x,y,z) = (3,4,5)$. Bestäm $f(3,4)$ och $\nabla f(3,4)$.

4. (a) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Är funktionen f kontinuerlig i punkten $(0,0)$?

   (b) Använd variabelbytet $(u,v) = (x, y-x^2)$ för att bestämma den allmänna C^1-lösningen $z(x,y)$ till den partiella differentialekvationen $z'_x + 2xz'_y = y + 2x^2$.

   (c) Låt $f(x,y,z) = x^3y + 10x + z^2$. Bestäm den enhetsvektor $\mathbf{v}$ som gör riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(2,-1,3)$ så stor som möjligt.

5. Bestäm alla punkter P på ytan $x^2y + xz + y - z^2 = 1$ sådana att ytans tangentplan i P skär xy-planet ortogonalt och P dessutom ligger i planet $x + y - z = 1$.

6. Beräkna volymen av kroppen

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x,\ 0 < y < 2-x,\ 0 < z < \frac{y}{\sqrt{x}} - 1\right\}.$$