Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2023-01-05

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u + z'_v \cdot \frac{y}{2\sqrt{x}}$ och $z'_y = z'_v \cdot \sqrt{x}$, så att PDE:n $2x\, z'_x - y\, z'_y = x^2 y$ transformeras till $2x\, z'_u + 0\, z'_v = x^2 y$, dvs. $z'_u = \frac{1}{2} v\sqrt{u}$. Integration ger $z = \frac{1}{3} v u^{3/2} + f(v) = \frac{1}{3} x^2 y + f(y\sqrt{x})$, där $f \in C^1(\mathbf{R})$. Bivillkoret ger sedan $0 = z(4,y) = \frac{16}{3} y + f(2y)$ för $y \in \mathbf{R}$, dvs. $f(t) = -\frac{8}{3} t$ för $t \in \mathbf{R}$, så att $z = \frac{1}{3} x^2 y - \frac{8}{3} y\sqrt{x}$.

   Svar: $z(x,y) = \dfrac{1}{3}\Big(x^2 y - 8y\sqrt{x}\Big)$.

2. Låt D_1 och D_2 vara de delar av enhetskvadraten där $y - x^2 \geq 0$ resp. $y - x^2 < 0$, alltså ovanför resp. nedanför kurvan $y = x^2$. Då är

$$\begin{aligned}
\iint_D \left|y - x^2\right| dxdy &= \iint_{D_1} (y - x^2)\, dxdy + \iint_{D_2} (-(y - x^2))\, dxdy \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{1} (y - x^2) dy \right) dx - \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{x^2} (y - x^2) dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\left[\tfrac{1}{2}(y - x^2)^2 \right]_{y=x^2}^{1} - \left[\tfrac{1}{2}(y - x^2)^2 \right]_{y=0}^{x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \Big((1 - x^2)^2 + (0 - x^2)^2 \Big) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} \Big(1 - 2x^2 + 2x^4 \Big) dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{11}{30}.
\end{aligned}$$

   Svar: 11/30.

3. Derivering av $f(x,y,z) = \frac{4}{3}\, x^3 - x^2 z + 4(x+y)z - 8x^2 - 3y^2 - 2z^2$ ger

$$\nabla f(x,y,z) = \Big(4x^2 - 2xz + 4z - 16x, 4z - 6y, -x^2 + 4(x+y) - 4z\Big),$$

   och speciellt

$$\nabla f(0,0,0) = \nabla f(4,0,0) = (0,0,0), \quad \nabla f(2,0,0) = (-16,0,4).$$

   Punkten $(2,0,0)$ är alltså inte ens stationär, och därmed ingen lokal extrempunkt heller. De andra två punkterna undersöks vidare med hjälp av den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen. Från andraderivatorna

$$\begin{gathered}
f''_{xx} = 8x - 2z - 16, \quad f''_{yy} = -6, \quad f''_{zz} = -4, \\
f''_{xy} = 0, \quad f''_{xz} = -2x + 4, \quad f''_{yz} = 4
\end{gathered}$$

   fås för punkten $(0,0,0)$

$$\begin{aligned}
Q(h,k,l) &= -16h^2 - 6k^2 - 4l^2 + 8hl + 8kl \\
&= -4(l - k - h)^2 - 2(k - 2h)^2 - 4h^2,
\end{aligned}$$

som är negativt definit (eftersom omskrivningen ovan visar att $Q \leq 0$ alltid, med $Q = 0$ bara då $h = k = l = 0$), samt för punkten $(4, 0, 0)$

$$Q(h, k, l) = 16h^2 - 6k^2 - 4l^2 - 8hl + 8kl,$$

som är indefinit (eftersom $Q(1, 0, 0) = 16 > 0$ och $Q(0, 1, 0) = -6 < 0$). Alltså är $(0, 0, 0)$ en lokal maximimipunkt för f, medan $(4, 0, 0)$ är en sadelpunkt (och alltså ingen lokal extrempunkt).

Svar: Lokalt maximum i $(0, 0, 0)$, varken lokalt maximum eller minimum i de två andra punkterna.

4. Vi noterar först att $\nabla f(x, y) = (2x + 6, 8y - 16)$. Kalla den sökta tangeringspunkten för (a, b). Den måste uppfylla ellipsens ekvation

$$a^2 + 6a + 4b^2 - 16b = 0,$$

samt vara sådan att vektorn från den sökta punkten (a, b) till den givna punkten $(2, \frac{3}{4})$ är vinkelrät mot ellipsens normalvektor $\nabla f(a, b)$ i tangeringspunkten (dvs. dessa vektorers skalärprodukt är noll):

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - a, \tfrac{3}{4} - b) \cdot (2a + 6, 8b - 16) \\ &= -2a^2 - 2a - 8b^2 + 22b. \end{aligned}$$

Genom att kombinera dessa två villkor på lämpligt vis erhålls

$$0 = (-2a^2 - 2a - 8b^2 + 22b) + 2(a^2 + 6a + 4b^2 - 16b) = 10a - 10b,$$

alltså $b = a$, vilket insatt i ellipsens ekvation ger

$$0 = a^2 + 6a + 4a^2 - 16a = 5a^5 - 10a = 5a(a - 2),$$

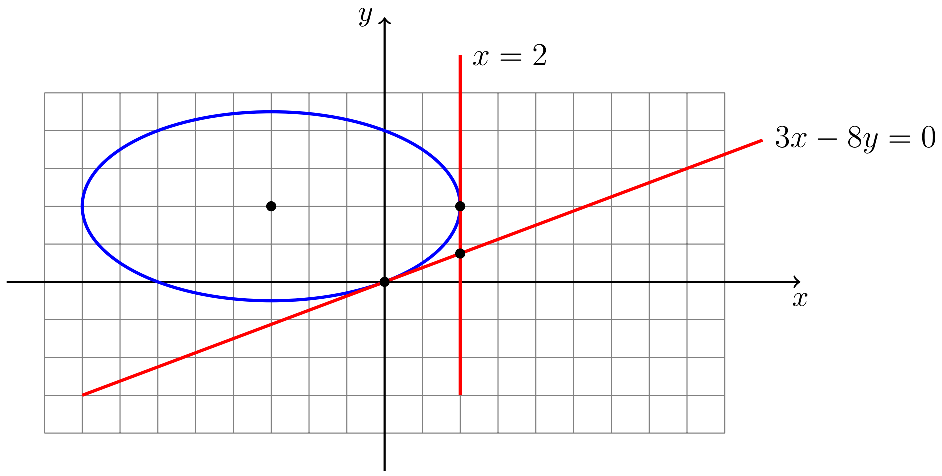
så att $a = 0$ eller $a = 2$. De möjliga tangeringspunkterna är alltså $(0, 0)$ och $(2, 2)$, där respektive tangentlinje har normalvektor $\nabla f(0, 0) = (6, -16)$ och $\nabla f(2, 2) = (10, 0)$, och från detta är det en rutinsak att ta fram linjernas ekvationer.

Svar: De sökta tangentlinjerna är $3x - 8y = 0$ och $x = 2$.

Som kontroll kan vi notera att omskrivningen

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 4y^2 - 16y = 0 &\iff (x + 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 25 \\ &\iff \left(\frac{x - (-3)}{5}\right)^2 + \left(\frac{y - 2}{5/2}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

visar att kurvan verkligen är en ellips, med mittpunkt $(-3, 2)$ och halvaxlar av längd 5 och 5/2. Figuren på nästa sida visar denna ellips ihop med de två linjerna som vi kom fram till.



5. Projektionen av kroppen D på xy-planet är en ellipsskiva,

$$\begin{aligned}\widetilde{D} &= \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4xy + 13y^2 \le 3\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x + 2y)^2 + (3y)^2 \le 3\right\}.\end{aligned}$$

För att beräkna D:s volym använder vi stavar i z-led, och därefter variabelbytet $(u, v) = (x + 2y, 3y)$, med $dudv = 3\,dxdy$ och det nya området

$$E = \left\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 \le 3\right\},$$

alltså en cirkelskiva med radien $\sqrt{3}$, samt avslutar med att byta till polära koordinater (ρ, φ) i uv-planet:

$$\begin{aligned}\iiint_D dxdydz &= \iint_{\widetilde{D}} \Big(3 - (x^2 + 4xy + 13y^2)\Big) dxdy \\ &= \iint_E \Big(3 - (u^2 + v^2)\Big) \cdot \frac{1}{3}\, dudv \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} (3 - \rho^2)\, \rho\, d\rho\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{(3 - \rho^2)^2}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Svar: Volymen är $3\pi/2$.

6. Differentierbarhet i punkten (a, b) betyder (per definition) att funktionen f är definierad i någon omgivning till (a, b) och att det finns konstanter A och B sådana att

$$R(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

då $(h, k) \to (0, 0)$.

Från teorin vet vi att dessa konstanter i så fall ges av $A = f'_x(a, b)$ och $B = f'_y(a, b)$, så i vårt fall börjar vi med att (direkt från definitionen) beräkna

$$f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(3 + \frac{h^3}{h^2}\right) - 3}{h} = 1$$

och

$$f'_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\left(3 + \frac{-k^3}{k^2}\right) - 3}{k} = -1.$$

För differentierbarhet i $(0, 0)$ krävs alltså att

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} R(h, k) = 0,$$

där

$$\begin{aligned} R(h, k) &= \frac{\left(3 + \frac{(h+k)^2(h-k)}{h^2+k^2}\right) - 3 - 1 \cdot h - (-1) \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{(h+k)^2(h-k) - (h-k)(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{2hk(h-k)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}. \end{aligned}$$

Men så är inte fallet, eftersom $R(t, -t) = -\dfrac{4t^3}{2t^2\sqrt{2t^2}} = -\sqrt{2}$ för alla $t > 0$.

Svar: För definition, se ovan. Den givna funktionen f är inte differentierbar i $(0, 0)$.