Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2023-01-05 kl. 8.00–13.00

Skriv- och ritverktyg (som linjal, passare, gradskiva utan formler) får naturligtvis användas. Andra hjälpmedel är inte tillåtna. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. Bestäm alla C^1-funktioner $z(x, y)$ som är definierade för $x > 0$ och uppfyller

$$\begin{aligned} 2x\,\frac{\partial z}{\partial x} - y\,\frac{\partial z}{\partial y} &= x^2 y, \quad \text{för } x > 0 \text{ och } y \in \mathbf{R}, \\ z(4, y) &= 0, \qquad \text{för } y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

   (Använd t.ex. variabelbytet $(u, v) = \big(x, y\sqrt{x}\,\big)$, där $x > 0$.)

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \left|y - x^2\right|\,dxdy$$

   över enhetskvadraten $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

3. Låt

$$f(x, y, z) = \frac{4}{3}\,x^3 - x^2 z + 4(x + y)z - 8x^2 - 3y^2 - 2z^2.$$

   Undersök för följande tre punkter om f har lokalt maximum, lokalt minimum eller ingetdera där:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), \quad (2, 0, 0), \quad (4, 0, 0).$$

4. Bestäm alla linjer $Ax + By = C$ som tangerar ellipsen $x^2 + 6x + 4y^2 - 16y = 0$ och går genom punkten $(x, y) = (2, \frac{3}{4})$.

   (Ett tips: Svarets rimlighet kan kontrolleras genom att rita en noggrann figur.)

5. Beräkna volymen av den begränsade kropp D i $\mathbf{R}^3$ som ligger mellan paraboloiden $z = x^2 + 4xy + 13y^2$ och planet $z = 3$.

6. Definiera vad som menas med att funktionen $f(x, y)$ är differentierbar i punkten (a, b), och undersök om

$$f(x, y) = \begin{cases} 3 + \dfrac{(x + y)^2 (x - y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0), \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   är differentierbar i $(0, 0)$.