Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2023-06-01

1. Sätt $\begin{cases} u = x + y, \\ v = 2x - y. \end{cases}$ Notera att sambandet mellan (u, v) och (x, y) är inverterbart, eftersom det $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -3 \neq 0$. Nu är

$$u'_x = 1, \quad u'_y = 1, \quad v'_x = 2, \text{ och } \quad v'_y = -1 \quad \text{för alla} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Eftersom f enligt antagande är differentierbar i varje punkt fås, enligt kedjeregeln,

$$\begin{aligned} f'_x &= f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u + 2f'_v; \\ f'_y &= f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u - f'_v; \end{aligned}$$

liksom

$$\begin{aligned} f''_x &= (f'_x)'_u \cdot u'_x + (f'_x)'_v \cdot v'_x \overset{f \in \mathcal{C}^2}{=} f''_{uu} + 4f''_{uv} + 4f''_{vv}; \\ f''_{xy} &= (f'_x)'_u \cdot u'_y + (f'_x)'_v \cdot v'_y \overset{f \in \mathcal{C}^2}{=} f''_{uu} + f''_{uv} - 2f''_{vv}; \\ f''_{yy} &= (f'_y)'_u \cdot u'_y + (f'_y)'_v \cdot v'_y \overset{f \in \mathcal{C}^2}{=} f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} f''_{xx} + f''_{xy} - 2f''_{yy} = 9 \ \Leftrightarrow \ f''_{uv} = 1 \ \Leftrightarrow \ f'_u = v + g(u) \text{ för någon } g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}) \\ \Leftrightarrow f = uv + G(u) + h(v) \end{aligned}$$

där $G, h \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ (G är en godtycklig primitiv funktion till g).

Insättning av $u = x + y$ och $v = 2x - y$ ger följande resultat.

Svar: Lösningarna till ekvationen är alla funktioner f på formen

$$f(x, y) = (x + y)(2x - y) + G(x + y) + h(2x - y), \quad \text{där} \quad G, h \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}).$$

2. Sätt $f(x, y, z) = e^{xy} + x - z$. Ytan ges då av ekvationen $f(x, y, z) = 3$, och eftersom $f(1, 0, -1) = e^0 + 1 - (-1) = 3$ så ligger punkten $(1, 0, -1)$ på ytan. Gradientvektorn till f ges av

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)) = (ye^{xy} + 1, xe^{xy}, -1);$$

och alltså är

$$\nabla f(1, 0, -1) = (1, 1, -1)\,.$$

En punkt (x, y, z) ligger i tangentplanet om och endast om

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0, -1) \bullet (\, (x, y, z) - (1, 0, -1)\,) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1, 1, -1) \bullet (\, (x, y, z) - (1, 0, -1)\,) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - z = 1^2 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 2\,. \end{aligned}$$

Svar: Tangentplanet ges av ekvationen $x + y - z = 2$.

3. Gradientvektorn till f ges av $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 1, 2y)$.

Stationära punkter:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \ \Leftrightarrow \ (3x^2 - 1, 2y) = (0, 0) \ \Leftrightarrow \ (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\, 0\right)$$

Hessianen till f ges av

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $H(1/\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $2\sqrt{3}, 2 > 0$, och den tillhörande kvadratiska formen är alltså positivt definit. Således har funktionen f ett lokalt minimum i (den stationära) punkten $(1/\sqrt{3},0)$.

Matrisen $H(-1/\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvärdena $-2\sqrt{3}$ och 2. Eftersom egenvärdena har olika tecken är den kvadratiska formen indefinit. Därav följer att den stationära punkten $(-1/\sqrt{3},0)$ inte är en extrempunkt till f.

Svar: Funktionen f har ett unikt lokalt minimum i punkten $(1/\sqrt{3},0)$.

4. Inför polära koordinater: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ Då är $\left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| = \rho$, och $(x,y) \in D \Leftrightarrow (\rho,\varphi) \in D'$, där $D' = [\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Därmed är

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} \sin(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} \rho\sin(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} \rho\sin(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho = \left[\substack{t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t=2\rho\mathrm{d}\rho} \right] = \pi \int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[-\cos t\right]_{\pi}^{4\pi} = \frac{\pi}{2}(-1-1) = -\pi\,.$$

Svar: $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$

5. Notera att integralen är generaliserad, eftersom området D är obegränsat. Låt $D_+ = \{(x,y,z) \in D \mid y/x^3 \geq 0\}$ och $D_- = \{(x,y,z) \in D \mid y/x^3 < 0\}$. Då är $\displaystyle\iiint_D \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ konvergent om och endast om $\displaystyle\iiint_{D_+} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ och $\displaystyle\iiint_{D_-} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ är konvergenta, och i så fall gäller att

$$\iiint_D \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{D_+} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{D_-} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Sätt $\begin{cases} u = x+y+2z; \\ v = x-y; \\ w = x. \end{cases}$ Då är $(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (u,v,w) \in D' := [0,2] \times]1,2[\times [1,\infty[$, och $\dfrac{y}{x^3} = \dfrac{x-v}{x^3} = \dfrac{w-v}{w^3} \geq 0$ om och endast om $w \geq v$. Sätt

$$\begin{aligned} D'_+ &= \{(u,v,w) \in D' \mid w \geq v\} = \big\{(u,v,w) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2,\ 1 < v < 2,\ v \leq w\big\}, \quad \text{och} \\ D'_- &= \{(u,v,w) \in D' \mid w < v\} = \big\{(u,v,w) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 2,\ 1 < v < 2,\ 1 \leq w < v\big\}, \end{aligned}$$

så att $(x,y,z) \in D_+ \Leftrightarrow (u,v,w) \in D'_+$ och $(x,y,z) \in D_- \Leftrightarrow (u,v,w) \in D'_-$.

Funktionaldeterminanten för variabelbytet ges av $\dfrac{\mathrm{d}(u,v,w)}{\mathrm{d}(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.$

Nu gäller

$$\iiint_{D_+} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{D'_+} \frac{w-v}{w^3}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^2 \left(\int_1^2 \left(\int_v^\infty \frac{w-v}{w^3}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}u \cdot \int_1^2 \left(\lim_{R\to\infty}\int_v^R \left(\frac{1}{w^2}-\frac{v}{w^3}\right)\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \int_1^2 \left(\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{w}+\frac{v}{2w^2}\right]_{w=v}^R\right)\mathrm{d}v$$

$$= \int_1^2 \left(\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+\frac{v}{2R^2}+\frac{1}{v}-\frac{1}{2v}\right)\right)\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{1}{2v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\left[\ln|v|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln 2\,,$$

och

$$\iiint_{D_-} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{D'_-} \frac{w-v}{w^3}\cdot\left|\frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \overset{\text{Fub.}}{=} \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_1^2 \left(\int_1^v \frac{w-v}{w^3}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \mathrm{d}u\cdot\int_1^2 \left[-\frac{1}{w}+\frac{v}{2w^2}\right]_{w=1}^v \mathrm{d}v = \int_1^2 \left(-\frac{1}{v}+\frac{1}{2v}+1-\frac{v}{2}\right)\mathrm{d}v = \int_1^2 \left(-\frac{1}{2v}+1-\frac{v}{2}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln|v|+v-\frac{v^2}{4}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2+2-1+\frac{1}{2}\ln 1-1+\frac{1}{4} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Notera att Fubinis sats kan tillämpas i integralerna ovan, eftersom integranden i vardera fall är positiv respektive negativ.

Eftersom integralerna över D_+ och D_- är konvergenta så följer att även integralen över D är konvergent, med värde

$$\iiint_D \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{D_+} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{D_-} \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{4}\,.$$

Svar: Integralen är konvergent, med värde $\displaystyle\iiint_D \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{4}$.

6. På den öppna mängden $]0,\infty[\times\mathbf{R}$ är $f(x,y) = xy+y$. Eftersom polynom är differentierbara i varje punkt gäller att f är differentierbar på denna mängd. Vidare är

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x+1\end{pmatrix} \quad \text{för alla } (x,y)\in\,]0,\infty[\times\mathbf{R}\,.$$

På samma sätt gäller att f är differentierbar på $]-\infty,0[\times\mathbf{R}$, eftersom $f(x,y) = -xy+y$ där. Funktionalmatrisen är $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & 1-x\end{pmatrix}$ för alla $(x,y)\in\,]-\infty,0[\times\mathbf{R}$.

För att beräkna $f'_x(0,y)$, betrakta

$$\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h} = \frac{|h|y+y-y}{h} = \frac{|h|}{h}y \to \pm y \text{ då } h\to 0^{\pm}.$$

Om $y\neq 0$ så är alltså $f'_x(0,y) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}$ odefinierad, varav det följer att f ej är differentierbar i $(0,y)$ då $y\neq 0$.

För $y=0$ blir gränsvärdet ovan noll, och vi får $f'_x(0,0) = 0$. Dessutom är

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{(0+k)-0}{k} = 1\,.$$

Nu gäller att f är differentierbar i $(0,0)$ om och endast om

$$\psi(h,k) = \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0)\,.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\psi(h,k) = \frac{(|h|k+k)-k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \frac{|h|k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{bmatrix}\text{polära} \\ \text{koordinater}\end{bmatrix} = \frac{|\rho\cos\varphi|\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2}} \\ &= \frac{\rho^2|\cos\varphi|\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2}} = \rho(|\cos\varphi|\sin\varphi) \to 0 \qquad \text{då} \quad (h,k) \to (0,0).\end{aligned}$$

Alltså är funktionen f differentierbar i punkten $(0,0)$, och $\dfrac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$.

Svar: Funktionen f är differentierbar i punkten (x,y) om och endast om $x \neq 0$ eller $y = 0$. För dessa punkter gäller att

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix}y & 1+x\end{pmatrix} &&\text{om } x \geq 0\,, \text{ och} \\ &\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix}-y & 1-x\end{pmatrix} &&\text{om } x < 0\,.\end{aligned}$$