Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2023-08-16

1. a) Variabelbytet är linjärt, och därför differentierbart. Kedjeregeln ger

$$0 = \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 1\frac{\partial x}{\partial u} + 0\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}.$$

Alltså är $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0$.

Alternativt kan man lösa ut x som en funktion av u och v, och därifrån beräkna $\frac{\partial x}{\partial u}$.

b) Eftersom även funktionen f är differentierbar, så ger kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

samt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Svar: a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0$. b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = a\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y} = b\dfrac{\partial f}{\partial u}$.

2. Låt $F(x,y) = e^{xy} + x + y$. Då kan ekvationen skrivas som $F(x,y) = 0$, och $F \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Vidare är $F(0,-1) = e^0 + 0 - 1 = 0$, samt $\dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^{xy} + 1$ och därmed $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,-1) = 0 + 1 = 1 \neq 0$.
Implicita funktionssatsen ger nu att ekvationen $F(x,y) = 0$ definierar y som en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x)$ i en omgivning av punkten $(0,-1) \in \mathbf{R}^2$. Eftersom funktionen f är $\mathcal{C}^1$ är den, i synnerhet, differentierbar.

I en omgivning av punkten $(0,-1)$ gäller alltså $0 = F(x, f(x)) = e^{xf(x)} + x + f(x)$. Derivering av vänster- och högerled (med avseende på x) av denna ekvation ger

$$0 = (f(x) + xf'(x))e^{xf(x)} + 1 + f'(x) = f(x)e^{xf(x)} + 1 + (xe^{xf(x)} + 1)f'(x)$$

och därmed $f'(x) = -\dfrac{f(x)e^{xf(x)} + 1}{xe^{xf(x)} + 1}$. I synnerhet är $f'(0) = -\dfrac{f(0)e^0 + 1}{0 + 1} = -\dfrac{-1+1}{1} = 0$.

Svar: $f'(x) = -\dfrac{f(x)e^{xf(x)} + 1}{xe^{xf(x)} + 1}$, $\quad f'(0) = 0$.

3. Låt $\bar{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ och $\bar{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Variabelbytet

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + s\bar{a} + t\bar{b} = \begin{pmatrix}1 + 2s + t\\1 + s + 2t\end{pmatrix}$$

avbildar triangeln T i (x,y)-planet på triangeln T' med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$ i (s,t)-planet. Vi har alltså

$$T' = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le s,t;\ s + t \le 1\} = \{(s,t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le s \le 1;\ 0 \le t \le 1 - s\}$$

och $(x,y) \in T \;\Leftrightarrow\; (s,t) \in T'$.

Vidare gäller att variabelbytet är differentierbart (eftersom det är linjärt), att

$$\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(s,t)} = \begin{vmatrix}x'_s & x'_t\\ y'_s & y'_t\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 3\,,$$

och att $x - y - 2 = (1 + 2s + t) - (1 + s + 2t) - 2 = s - t - 2$. Med hjälp av variabelbyte och Funbinis sats får vi

$$\iint_T (x-y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{T'} (s-t-2)\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(s,t)}\right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t = 3\int_0^1 \left(\int_0^{1-s} (s-t-2)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

$$= 3\int_0^1 \left[st - \frac{t^2}{2} - 2t\right]_{t=0}^{1-s} \mathrm{d}s = 3\int_0^1 \left(s(1-s) - \frac{(1-s)^2}{2} - 2(1-s)\right)\mathrm{d}s$$

$$= 3\int_0^1 \left(-\frac{3}{2}s^2 + 4s - \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}s = 3\left[-\frac{1}{2}s^3 + 2s^2 - \frac{5}{2}s\right]_0^1 = 3\left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}\right) = -3\,.$$

Svar: $\displaystyle\iint_T (x-y-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3.$

4. För att beräkna skärningen mellan de båda ytorna sätter vi $2x^2 + y^2 - 1 = x^2 - 2y^2$, och får $x^2 + 3y^2 = 1$. Detta betyder att skärningen består av de punkter $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ som uppfyller $x^2 + 3y^2 = 1$ och $z = x^2 - 2y^2$. För punkter i (x, y)-planet som ligger innanför skärningskurvan, det vill säga som uppfyller olikheten $x^2 + 3y^2 < 1$, gäller att $2x^2 + y^2 - 1 < x^2 - 2y^2$. Det område D vars volym vi skall beräkna begränsas alltså nedifrån av ytan $z = 2x^2 + y^2 - 1$ och uppifrån av ytan $z = x^2 - 2y^2$:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 \le 1,\ 2x^2 + y^2 - 1 \le z \le x^2 - 2y^2\}.$$

Låt $\tilde{D}$ vara projektionen av D på (x, y)-planet: $\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 3y^2 \le 1\}$.

Med hjälp av Fubinis sats får vi

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{\text{Fub.}}{=} \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{2x^2+y^2-1}^{x^2-2y^2} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\tilde{D}} \left((x^2-2y^2) - (2x^2+y^2-1)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{D}} \left(1 - x^2 - 3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Variabelbytet $(u, v) = (x, \sqrt{3}y)$ avbildar $\tilde{D}$ på enhetsskivan $B(0; 1)$ i (u, v)-planet, och $\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} = \sqrt{3}$. Vi får

$$\iint_{\tilde{D}} \left(1 - x^2 - 3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{B(0;1)} (1-u^2-v^2)\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \overset{\text{polära}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\substack{\rho\in[0,1]\\ \varphi\in[0,2\pi]}} (1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$\overset{\text{Fub.}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (\rho - \rho^3)\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Svar: $\mathrm{Vol}(D) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

5. Låt $f(x, y) = x^2 + ay^2$ och $\bar{n} = (2, -1)$. Då är kurvan $x^2 + ay^2 = 1$ en nivåkurva till funktionen f, och $\bar{n}$ en normalvektor till linjen $y = 2x$. Kurvan skär linjen vinkelrätt i punkten (x, y) om och endast om

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) \bullet \bar{n} = 0; \\ y = 2x; \\ x^2 + ay^2 = 1. \end{cases}$$

Vi har $\nabla f(x, y) = (2x, 2ya)$ och därmed $\nabla f(x, y) \bullet \bar{n} = 4x - 2ya$. Villkoren $\nabla f(x, y) \bullet \bar{n} = 0$ och $y = 2x$ ger nu

$$0 = 4x - 2ya \overset{[y=2x]}{=} 4x - 4xa = 4x(1-a)$$

det vill säga att $x = 0$ eller $a = 1$. Om $x = 0$ så är $y = 2x = 0$, och $f(x, y) = x^2 + ay^2 = 0$, vilket motsäger att $f(x, y) = 1$. Detta visar att om kurvan skär linjen vinkelrätt i någon punkt, så måste $a = 1$.

Omvänt, antag att $a = 1$. Då är $f(x, y) = x^2 + y^2$, och skärningspunkterna med linjen $y = 2x$ ges av $1 = f(x, 2x) = x^2 + (2x)^2 = 5x^2$, det vill säga att $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ eller $(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. För båda dessa punkter gäller att $\nabla f(x, y) \bullet \bar{n} = 4x - 2y = 0$, det vill säga att kurvan (cirkeln) skär linjen vinkelrätt.

Svar: Kurvan skär linjen vinkelrätt i samtliga skärningspunkter om och endast om $a = 1$.

6. Funktionen f är differentierbar i varje punkt i $\mathbf{R}^2$ (eftersom den är en polynomfunktion), och varje extremvärde måste därför vara en stationär punkt. Vi har

$$\nabla f(x, y) = \left(20x(x + 2y^2 - 1)^9, 40y(x + 2y^2 - 1)^9\right)$$

och därmed

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \text{ eller } (x, y) = (0, 0).$$

Om $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ så är $f(x, y) = 0$. Samtidigt gäller att $f(a, b) \geq 0$ för varje punkt $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Därför är varje punkt på kurvan $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ en (global, men ej strikt) minimipunkt till funktionen f.

Betrakta istället punkten $(x, y) = (0, 0)$. Vi har $f(0, 0) = 1$, och skall visa att $f(x, y) \leq 1$ i en omgivning av $(0, 0)$. Låt $(x, y) \in B(0; 1)$, det vill säga att $|(x, y)| < 1$. Då är

$$\begin{aligned}
&0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2 = |(x, y)|^2 < 1 \\
\Rightarrow\ &0 \leq x^2 + 2y^2 < 2 \\
\Rightarrow\ &-1 \leq x^2 + 2y^2 - 1 < 1 \\
\Rightarrow\ &f(x, y) = (x^2 + 2y^2 - 1)^{10} \leq 1\,.
\end{aligned}$$

Funktionen f har alltså ett lokalt maximum i origo.

Svar: Punkten $(0, 0)$ är en maximipunkt, och punkterna på kurvan $x^2 + 2y^2 = 1$ är minimipunkter, till funktionen f.