Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2023-08-16 kl. 14.00–19.00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. Betrakta variabelbytet $\begin{cases} u = ax + by, \\ v = x, \end{cases}$ där $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.

   (a) Beräkna $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.

   (b) Givet $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$, bestäm $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ i termer av $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, a och b.

2. Visa att ekvationen $e^{xy} + x + y = 0$ i en omgivning av punkten $(0, -1)$ definierar en differentierbar funktion $y = f(x)$. Bestäm en formel (uttryckt i termer av x och $f(x)$) för derivatan f' av f i denna omgivning, och beräkna $f'(0)$.

3. Beräkna integralen
$$\iint_T (x - y - 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$
   där $T \subset \mathbf{R}^2$ är triangeln med hörn i punkterna $(1, 1)$, $(2, 3)$, och $(3, 2)$.

4. Bestäm volymen av det område i $\mathbf{R}^3$ som begränsas av ytorna $z = 2x^2 + y^2 - 1$ och $z = x^2 - 2y^2$.

5. Bestäm alla värden på den reella konstanten $a > 0$ sådana att kurvan $x^2 + ay^2 = 1$ skär linjen $y = 2x$ vinkelrätt i samtliga skärningspunkter.

6. Bestäm alla (lokala) maximi- och minimipunkter till funktionen
$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + 2y^2 - 1)^{10}.$$